УДК 514.181
DOI: 10.32347/0131-579X.2024.107.3-20
к. т. н, доц. **Бідніченко О.Г.**
helenbidnichenko@gmail.com, ORCID: 0000-0002-0548-3481
Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова (м. Миколаїв)

ОСОБЛИВОСТІ ГЕОМЕТРІЇ СПІРАЛЕЙ ТА ЇХ ПРИРОДНЕ І ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ

Дана робота присвячена актуальному питанню геометричного моделювання деяких видів спіралей та їх практичному застосуванню в природі та різних напрямах людської діяльності. Проведено геометричне й практичне дослідження спіралі Архімеда та її інверсії щодо полюса – гіперболічної спіралі, а також спіралі Ферма та її інверсії на колі одиничного радіуса – літууса. Подано математичний опис спіралей та розроблено їхні геометричні моделі: надано визначення та рівняння в полярних координатах, створені схеми графічного формоутворення та алгоритми їх побудови. Проведено порівняльний аналіз досліджуваних видів спіралей по відношенню до найстарішої спіралі Архімеда, яку було знайдено вперше ще в ІІІ столітті до н.е., та визначено геометричні властивості, які відрізняють види досліджуваних спіралей одну від одної. Особлива увага приділена дослідженню спіральних форм у природному середовищі та у практичному застосуванні. У статті підібрані різноманітні приклади природних спіралеподібних явищ і форм, що доводить актуальність даного геометричного дослідження різних видів спіралей. Показано, що завдяки своїм геометричним особливостям спіралі широко використовуються у багатьох напрямах сучасної людської діяльності: техніці, фізиці, математиці, астрономії, мистецтві, побуті тощо. Вироби зі спіралеподібними поверхнями використовуються в різних видах промисловості: нафтовій, хімічній, харчовій тощо. Особлива увага приділена висвітленню спіралей в архітектурних формах. Підібрані найбільш яскраві та характерні приклади використання різних видів спіралей, наведені фотографічні зображення. Зроблено висновок, що з розвитком науки знаходяться нові сфери використання досліджених видів спіралей, тому геометричні дослідження є необхідною умовою для можливості застосування спіралей у нових створюваних об'єктах різних галузей промисловості та поширення діапазону їхнього застосування.

Ключові слова: геометричне моделювання; спіраль; спіралеподібні явища; математична модель; види спіралей; практичне застосування.

Постановка проблеми. У сучасному світі при активному розвитку науки і техніки є велика потреба у вивченні природних явищ і закономірностей з метою отримання знань, які можуть бути використані на благо людини. Спостереження за навколишнім світом, вивчення природних явищ і форм, вміння узагальнити отриману інформацію дає змогу створювати математичні моделі для нових штучних об’єктів різноманітних напрямів. Природа створила багато цікавих форм, які вивчаються та досліджуються вченими, а результати досліджень та виявлені закономірності впроваджуються у багатьох виробах різних галузей промисловості. В природі можна часто зустріти криві лінії, які привертають увагу своїми витонченими формам і дивовижними властивостями. Одними із таких кривих є спіралі, які розповсюджені у природному середовищі як у двовимірному варіанті, так і у тривимірному. Доцільність вивчення властивостей спіралей не викликає сумнівів, особливо у сучасні часи, коли йде пошук нових прогресивних підходів і рішень для розв’язання наукових та промислових задач.

Аналіз основних досліджень і публікацій. У сучасних літературних джерелах приділяється все більше уваги дослідженню форм геометричних об’єктів зокрема кривих ліній та поверхонь. Представники Київської школи прикладної геометрії (д-р техн. наук Ковальов С.М., д-р техн. наук Ботвіновська С.І. та інші) багато років досліджують властивості різноманітних поверхонь та геометричні способи управління формою таких поверхонь [1, 2]. Дана стаття є продовженням низки досліджень автора, що присвячені аналізу геометричних властивостей кривих ліній та поверхонь різних класів, їх математичному і геометричному опису, поданню найбільш характерних прикладів застосування у різних галузях промисловості [3, 4, 5, 6]. Геометрична складова наукових досліджень спрямована на удосконалення існуючих та створення нових об’єктів та споруд [7], зокрема в архітектурі. Зацікавленість у вивченні спіралей підтверджується наявністю багатьох робіт цієї тематики в інтернет ресурсах [8, 9, 10, 11].

Ціль статті. Проаналізувати способи геометричного та математичного моделювання спіралі Архімеда, Ферма, гіперболічної спіралі та літууса. Визначити параметри, що впливають на форму вказаних видів спіралей, створити їхні графічні моделі. Провести дослідження їхніх геометричних властивостей, дослідити сфери використання, підібрати та навести приклади об’єктів, де застосовуються спіральні форми.

Основна частина. Зі стародавніх часів ще до нашої ери людина використовувала зображення спіралей (рис. 1), які спостерігала всюди у природі, як магічний символ, який втілює у собі образ еволюції всесвіту та самого життя взагалі. Спіраль, як геометрична особливість багатьох природних форм, вважалася символом життєвої сили та іноді зображувалась у вигляді скрученої змії: «З бездонної глибини виникло коло у вигляді спіралі... Всередині спіралі, згорнувшись, лежала змія, символ мудрості і вічності» [8]. Спіраль як плавна нескінченна лінія завжди символізувала розвиток, безперервність, доцентровий і відцентровий рух, ритм дихання і самого життя.

Рис. 1. Стародавні зображення спіралей на камінних

Спіральну форму мають такі природні явища як вихор, який уявляє собою особливу форму течії, при якій потік здійснює рух навколо уявної осі, прямої або вигнутої (рис. 2). Такий рух розповсюджений у рідинах, газоподібному середовищі та плазмі. Геометричною моделлю такого руху можуть бути димові кільця, водоверті у ріках, які можуть утворитися навіть при веслуванні, потужні вітри у вигляді торнадо або смерчів тощо.

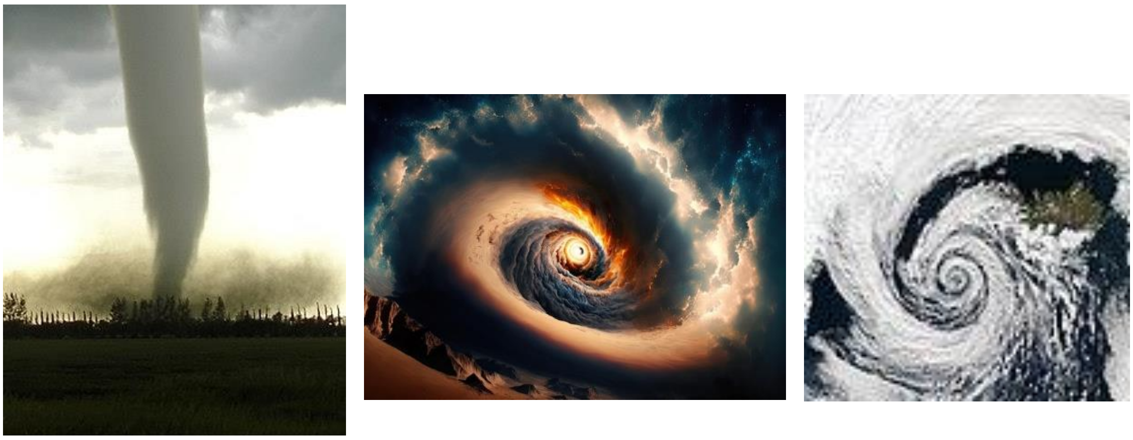


Рис. 2. Приклади спірального руху: спіралеподібний смерч,
спіралеподібне закручення в космосі,
область низького тиску над Ісландією

Спіралеподібний вихор сходить з будівель, що обдуваються вітром, утворюється літаками, що пролітають, автомобілями, що проїздять. Загальна циркуляція у атмосфері Землі є самоорганізована система вихорів у вертикальній та горизонтальній площинах. Наша Сонячна система та спіральні галактики також уявляють собою вихори. Спільна робота вчених природних наук і математиків пролила світло та пояснює ці дивні явища природи.

У живій природі спіралі є дуже поширеними, їх можна побачити на шишках сосни (рис. 3), ананасах, алое, кактусах тощо. У тваринному світі часто можна зустріти спіралеподібну форму: змія скручується у спіраль, хвіст хамелеона та роги диких козлів мають закручену спіраллю форму, переляканий табун північних оленів розбігається по спіралі, орел наздоганяючи свою здобич кружляє за спіраллю тощо.

Рис. 3. Геометричні моделі спіралей в природі

У природному середовищі спіраль може мати одну із трьох основних форм (рис.4): звужену (як у вирі), таку, що розширюється (як у зоряних галактиках) та застиглу (у виді мушлі рапани).

Рис. 4. Основні форми спіралі

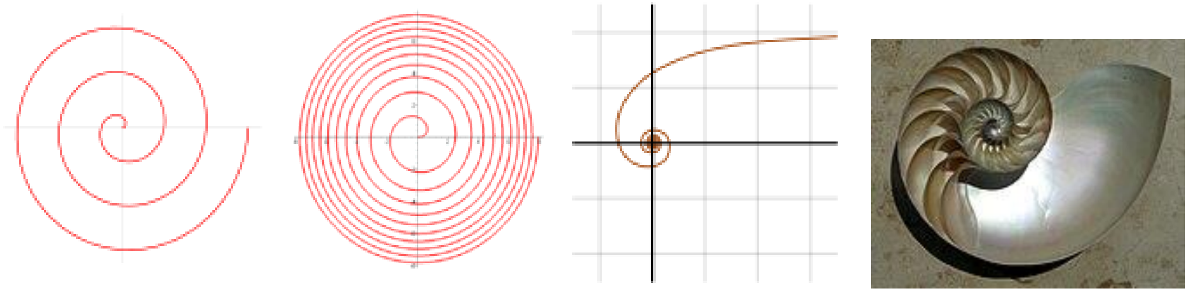
Як бачимо, сама Природа на основі певних природних законів розрізняє особливості геометрії та із множини геометричних форм віддає перевагу саме спіральним формам. Вся викладена інформація підтверджує актуальність та важливість даного геометричного дослідження особливостей різних видів спіралей.

Спіраль – це крива лінія, яка обертаючись навколо заданої точки або осі поступово наближається або віддаляється від цієї точки (осі). Спіралі є асиметричними кривими, які мають дві форми в залежності від напряму обертання. Кожна форма є відображенням одна одної. До найвідоміших видів спіралі належать спіраль Архімеда, спіраль Ферма, гіперболічна та логарифмічна спіралі (рис. 5), евольвента кола, літуус тощо. Літуусом в давні часи називали жезл із завитим у формі спіралі кінцем.

Назва "спіраль" пішла від слова "звиватися". Існують безліч видів спіралей і всі вони дуже цікаві і красиві. Проведемо дослідження геометричних моделей деяких видів спіралей.

Вперше математичний опис спіралей було надано древнє грецьким вченим Архімедом, який ще в ІІІ столітті до н.е. описав властивості плоскої спіралі в роботі «Про спіралі» [9].

Спіраль Архімеда – це плоска крива, яку описує точка *M* (рис.6) під час рівномірного руху вздовж променю *OV*, який, в свою чергу, рівномірно обертається навколо точки *O* (полюс спіралі).



а *б* *в* *г*

Рис. 5. Види спіралей: *а* – спіраль Архімеда; *б* – спіраль Ферма; *в* – гіперболічна спіраль; *г* – розріз черепашки у вигляді логарифмічної спіралі

Оскільки спіраль Архімеда є трансцендентною лінією, то вона може бути описана рівнянням в полярних координатах. Відстань ρ=*OM* пропорційна куту повороту φ променю *OV*. Повороту променю *OV* на однаковий кут відповідає один й той же приріст ρ. Таким чином, рівняння спіралі Архімеда у полярній системі координат має вид: $\rho = k\varphi$, де k – зміщення точки *M* вздовж променю *OV* на кут, що дорівнює одному радіану. Повороту променю на повний кут, тобто на 2π рад, відповідає зміщення a = |ВМ| = |МА| = 2*k*π, де *a* – крок спіралі. Тоді рівняння спіралі Архімеда у полярних координатах може бути записано у виді: $\rho = \frac{a}{2\pi}\varphi$. Спіраль може бути правою, якщо промінь *OV* обертається проти годинникової стрілки, або лівою, якщо обертання здійснюється за годинниковою стрілкою.

Геометрична модель спіралі Архімеда може бути сформована без використання математичних формул, тільки геометричними побудовами, за допомогою певної кількості (наприклад дванадцяти) концентричних кіл та такої ж кількості радіальних променів з рівними кутами між ними. Точки шуканої спіралі отримують в перетинах концентричних кіл з променями, з однаковими номерами. На рис. 7 побудовано один виток лівої спіралі Архімеда. Така лінія вважається кривою лекального типу.

Спіраль Архімеда може мати нескінчену кількість витків, кожен з яких з геометричної точки зору є кривою другого порядку. Визначимо чому дорівнює площа між двома витками спіралі Архімеда (ρ = *a*φ). Для цього (рис. 8) використовуємо формулу $S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi$ [12]. Перший виток спіралі відповідає куту від 0 до 2π. Тоді відстань точки від полюсу в кінці першого витка ρ дорівнює 2π*a*, в кінці другого витка – 4π*a*. Шукана площа дорівнює різниці площ, описаних другим та першим витками спіралі, тому формула запишеться у виді: $S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}((2\pi a + a\varphi)^2 - (a\varphi)^2)d\varphi$. Якщо взяти інтеграл від 0 до 2π, то остаточно отримаємо $S = 8\pi^3a^2$.

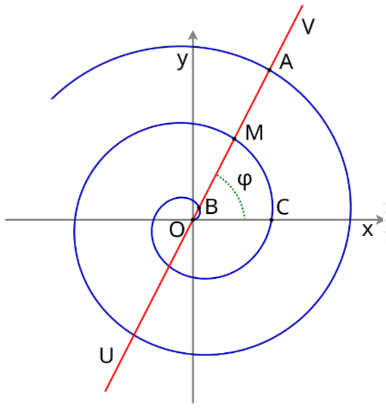


Рис. 6. Схема формоутворення спіралі

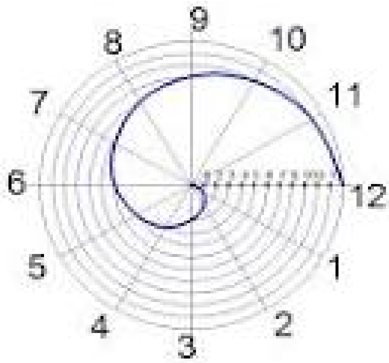


Рис. 7. Побудова геометричної моделі спіралі Архімеда

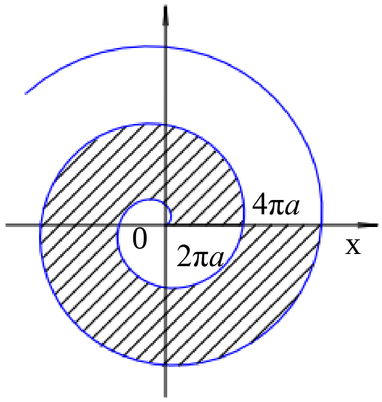


Рис. 8. Площа між витками спіралі Архімеда

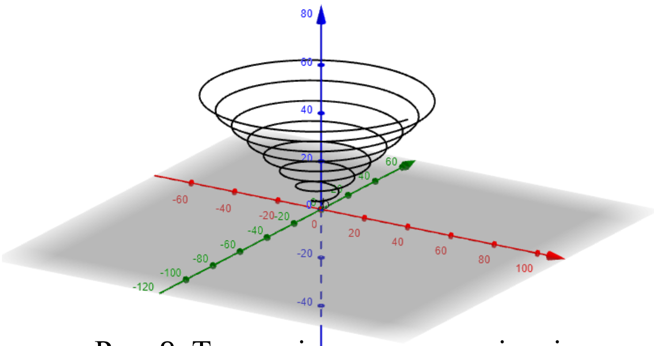


Рис. 9. Тривимірна модель спіралі Архімеда
https://www.geogebra.org/m/KMhbY52t

Описані вище спіралі є двовимірними. Але якщо до радіуса та кута додати третю координату – висоту, то утворюється тривимірна спіраль (рис. 9).

Геометричною моделлю тривимірної спіралі є конічна гвинтова лінія – просторова крива, яка розміщена на поверхні конуса обертання та утворена рівномірним рухом точки вздовж твірної, що рівномірно обертається навколо осі.

Побудову двокартинного комплексного креслення конічної гвинтової лінії [13] наведено на рис. 10. Горизонтальна проекція конічної спіралі є спіраллю Архімеда, а фронтальна – синусоїдою із згасаючою амплітудою**.** Конічна гвинтова лінія, як і циліндрична, має два параметри форми: крок h, який дорівнює висоті конуса, і кут a нахилу твірної конуса до площини його основи. Крок h є експоненціальною функцією від кута φ.

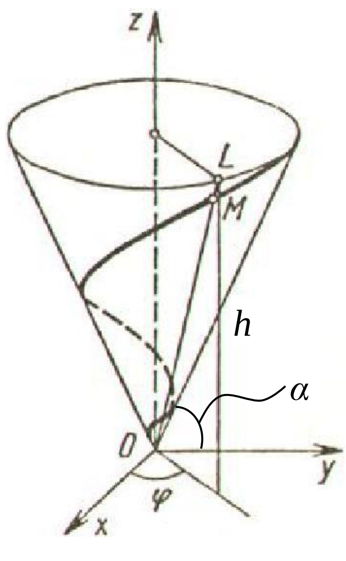


Рис. 10. Конічна гвинтова лінія

Реалістичні приклади спіралей можна побачити всюди в середовищі, що нас оточує. Наприклад всі види рулонів (рис.11), якщо подивитись на них з торцю, мають форму двовимірної спіралі Архімеда (рулон шпалер, згорнутий килим, кондитерський рулет тощо). Останнім часом з'явилися промислові вироби у формі спіралі, зокрема світлодіодні люстри химерного дизайну мають форму тривимірної спіралі.

На основі описаної спіралі Архімед вигадав гвинт, якій так і називається гвинтом Архімеда (рис. 12), а з геометричної точки зору є циліндричною спіраллю або поверхнею косого гелікоїда. Архімедів гвинт використовується в різних машинах для переміщення сипучих тіл і в'язких рідин, у гвинтових компресорах і т. п.

Рис. 11. Геометрична модель спіралі Архімеда у побутових прикладах

На рис. 13, ***а*** показано наочне зображення схеми гвинта Архімеда для підйому води із водойми. Такий принцип використовувався ще в часи до нашої ери та залишається популярним і в наші дні. Сучасні Архімедові гвинти (рис. 13, ***б***) використовуються для осушення низинних та оброблених ділянок землі у Голландії, а також в установках по обробці стічних вод, тому що вони успішно працюють з різними потужностями потоку і з суспензіями.

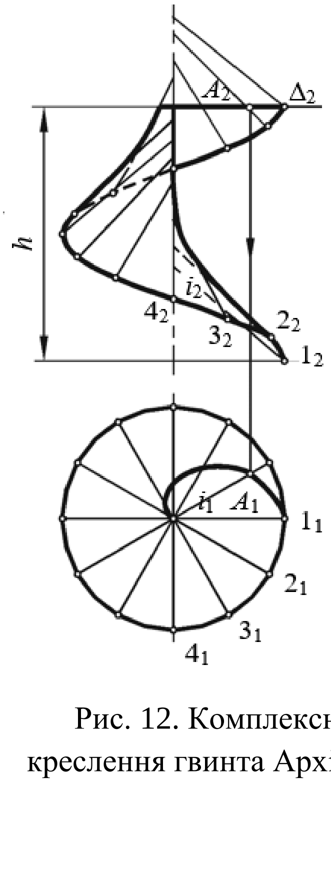
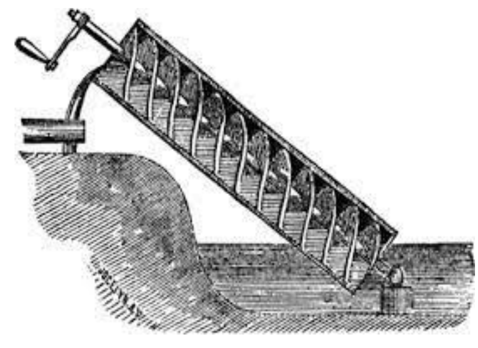


Рис. 12. Комплексне креслення гвинта Архімеда



а

б

Рис. 13. Використання спіралі Архімеда:
а – схема гвинта Архімеда; *б* – сучасні Архімедові гвинти у Голландії

Крім цього на базі гвинта Архімеда винайдений шнек, геометричною моделлю якого є ротор у м’ясорубці (рис.14, ***а***). В автомобільній промисловості для всюдиходів замість коліс використовують шнек, який дає змогу суттєво підвищити прохідність автомобіля на болотистих місцевостях (рис.14, ***б***). Машина обладнана двома або більше співвісними з напрямком руху роторами — гвинтами Архімеда. При обертанні вони відштовхуються від кашоподібної або рідкої субстанції, по якій рухається всюдихід, і просувають його вперед.

а *б*

Рис. 14. Геометричні моделі на базі спіралі Архімеда: *а* - шнек м’ясорубки; *б* - колеса всюдихода.

У сучасні часи з розробкою нових промислових технологій та появою нових матеріалів спіралі Архімеда знайшли широке застосування в житті та діяльності людини: спіралеподібні антени, самоцентровані патрони для затискання деталей, звукові доріжки на грампластинках та CD і DVD дисках, технічне обладнання для різних сучасних атракціонів (рис. 15) тощо.

а *б*

Рис. 15. Застосування спіралей Архімеда:
а – доріжки на грампластинках та CD дисках; *б* – гірка в аквапарку «Водолій» (м. Миколаїв).

Складна технічна задача здійснення теплообміну між брудними або в’язкими середовищами була розв’язана з появою спіральних теплообмінних апаратів (рис. 16). Було запропоновано закрутити лист сталі у спіраль Архімеда та спрямувати потік рідини з обох сторін листа. Така геометрична конструкція вийшла дуже зручною для користувачів, оскільки вона дозволяє змінювати відстань між листами, говорячи

Рис. 16. Схема спірального теплообмінника

геометричною мовою – збільшити щільність витків спіралі, в залежності від властивостей теплоносіїв. Завдяки такій властивості теплообмінники спірального типу отримали широке розповсюдження у різних гілках промисловості: у нафтопереробній, хімічній, харчовій видах промисловості, тобто там, де важливо не допустити змішування потоків рідин.

Рівняння узагальненої форми спіралі Архімеда у полярних координатах має вигляд: $\rho = b + a\varphi^{\frac{1}{n}}$. Сама спіраль Архімеда є частковим випадком узагальненої спіралі. Підставляючи різні значення змінної n отримаємо різні функціональні залежності, які мають різні геометричні моделі. При $n = 1$ виходить рівняння спіралі Архімеда. Якщо надати n значення -1 ($n = -1$), то отримаємо гіперболічну спіраль, при $n = 2$ виходить рівняння спіралі Ферма, а при $n = -2$ – літуус. Дослідимо геометричні особливості вказаних видів спіралей.

Спіраль Ферма, яку іноді називають параболічною спіраллю (рис. 17), уявляє собою дві конгруентні гілки, які у центрі плавно поєднуються. Це плоска крива, яка має властивість, що площа між будь-якими послідовними повними витками навколо спіралі інваріантна. Виходячи з цього відстань між двома витками спіралі Ферма збільшується обернено пропорційно їх відстані від центра спіралі.

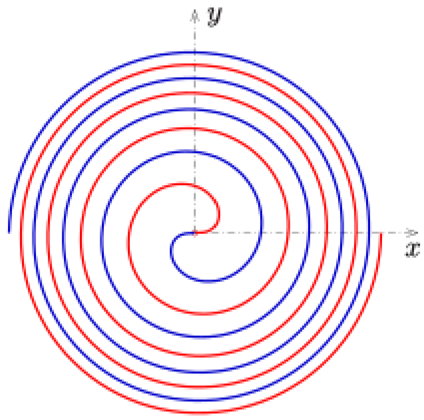


Рис. 17. Спіраль Ферма

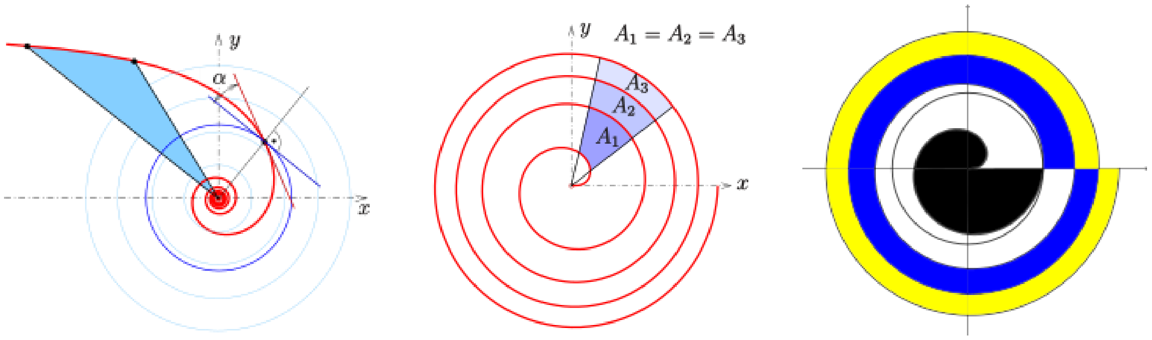
Спіраль Ферма має таке рівняння в полярних координатах: $\rho = \pm a\varphi^{\frac{1}{2}}$.

Більш узагальнений вид рівняння на площині запишеться так: $\rho^2 = a^2\varphi$.

Даний вид спіралі названий ім'ям одного з творців аналітичної геометрії великого французького математика П'єра Ферма, який жив і працював на початку 17 сторіччя. Досліджена Ферма спіраль є різновидом Архімедової спіралі. Але відмінність спіралі Ферма полягає у тому, що відстань між сусідніми витками звичайної спіралі Архімеда завжди однакова, а у спіралі Ферма вона змінюється.

До геометричних властивостей Спіралі Ферма можна віднести той факт, що повна спіраль (обидві гілки) є гладкою кривою без подвійної точки, на відміну від Архімедової спіралі. Спіраль Ферма поділяє площину на дві пов’язані між собою та конгруентні області.

Дослідимо деякі геометричні властивості спіралі Ферма. Із векторного обчислення в полярних координатах випливає вираз: $\tan\alpha = \frac{\rho'}{\rho}$ для полярного нахилу та його кута α між дотичною до кривої та відповідним полярним колом (рис.18, ***а***). Враховуючі, що рівняння спіралі Ферма можна записати як $\rho = a\sqrt{\varphi}$, то підставивши значення ρ у вираз для кута α отримаємо таку залежність: $\tan\alpha = \frac{1}{2\varphi}$. Таким чином, кут полярного нахилу монотонно зменшується.



а *б* *в*

Рис. 18. Геометричні властивості спіралі Ферма

Площа сектора спіралі Ферма (рис.18, ***б***) між двома точками з координатами (ρ(φ₁), φ₁) та (ρ(φ₂), φ₂) дорівнює $\bar{A}$=$\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi)^2\, d\varphi$. Підставивши замість ρ його вираз у полярних координатах, а потім взявши інтеграл і розклавши на множники різницю квадратів кутів отримаємо вираз $\bar{A}$= $\frac{a^2}{4}(\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_2 - \varphi_1)$. Додаємо до кожного із кутів по 2π, тоді вираз буде мати вид: $\bar{\bar{A}} = \frac{a^2}{4}(\varphi_2 + \varphi_1 + 4\pi)(\varphi_2 - \varphi_1) = \bar{A} + a^2\pi(\varphi_2 - \varphi_1)$.

Звідси випливає, що площа A області між двома сусідніми дугами дорівнює різниці визначених площ: $A = \bar{\bar{A}} - \bar{A} = a^2\pi(\varphi_2 - \varphi_1)$.

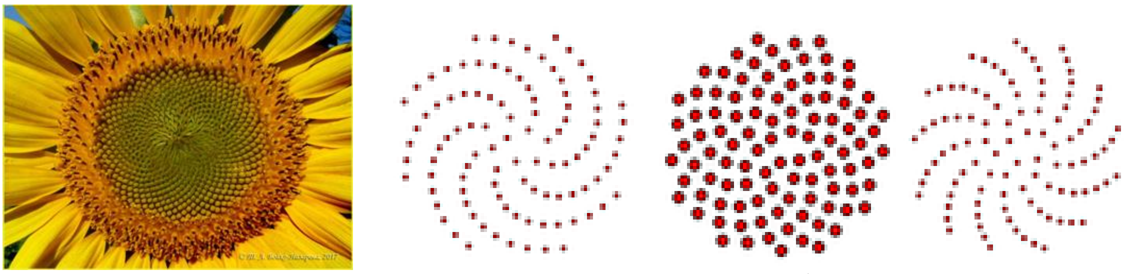
Виходячи з отриманої формули доведено, що площа сектора залежить тільки від різниці кутів, а не від самих кутів. Для того прикладу, що показано на схемі (див. рис.18, ***б***), всі сусідні полоси мають однакову площу: A_1=A_2=A_3. Така геометрична властивість спіралі Ферма дає змогу використовувати її в електротехніці для створення змінних конденсаторів.

Розглядаючи далі особливості спіралі Ферма припустимо, що φ_1=0, а φ_2=2π, тоді площа центральної частини (чорна область) (рис.18, ***в***) дорівнює A_0=$a^2\pi^2$. Це складає половину площі кола K_0 радіуса ρ(2π). Області між сусідніми кривими мають однакову площу A=2$a^2\pi^2$. Отже площа між двома дугами спіралі Ферма після повного оберту дорівнює площі кола K_0.

Значно пізніше ніж Ферма, спостерігаючи за навколишнім світом німецький вчений Гельмут Фогель у 1979 році запропонував модель для розташування квіток і насіння у соняшнику. Форма спіралей, за якими розташовуються квітки, залежить від стадії їх росту. Колі всі елементи мають однаковий розмір, форма їх розташування є спіраллю Ферма (рис. 19, ***а***).

Така геометрична модель може виражатися алгебраїчно наступним чином: $\rho = c\sqrt{n}$; $\theta = n \cdot 137.5°$, де θ – кут, ρ – радіус або відстань від центру, n — номер квітки, c – константа. Кут 137,5° - це золотий кут, який є апроксимованим відношенням чисел Фібоначчі.

На рис.19, ***б*** по центру наведено геометричне зображення алгоритму розміщення простих маленьких квіток у головці соняшника, а два інших зображення показують розміщення квіток при інших значеннях кута θ.



а *б*

Рис. 19. Фото та геометрична модель розподілу квіток і насіння у соняшнику

Потрібно відзначити, що використання спіралі Ферма здійснюється в тих напрямах, де є неперервне змішання кривих ліній, для моделювання росту рослин та дослідження форм деяких спіральних галактик. В техніці – це проектування змінних конденсаторів (рис.20, ***а***), в яких під дією електричного поля заряджена частка прискорюється за траєкторією, що уявляє собою спіраль Ферма.; циклотрони тощо. Найкрупніші фотоелектричні установки (рис.20, ***б***) складаються із декількох мільйонів сонячних модулів, які розташовані як насіння у кошику соняшника. Спіраль Ферма виявилась найефективнішою формою компонування дзеркал концентраторів сонячних електростанцій.

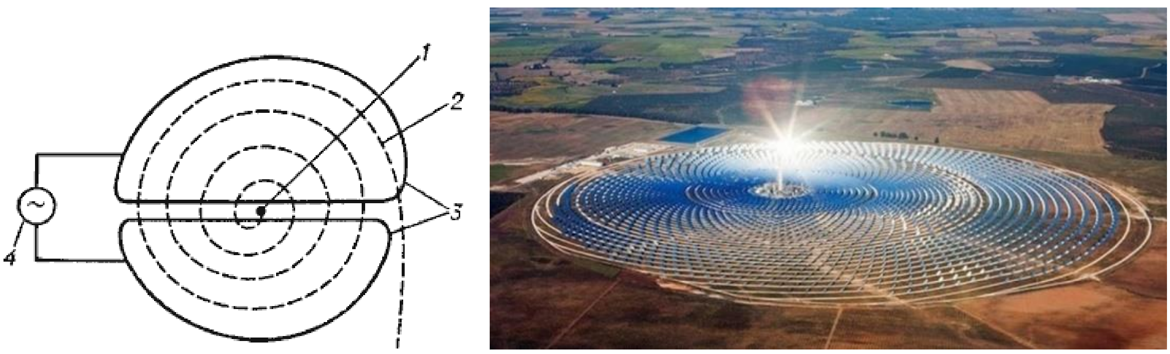


Рис. 20. Спіралі Ферма: *а* - схема циклотрона: вид зверху: 1 – джерело тяжких заряджених часток (протонов, іонов), 2 – орбіта частки, що прискорюється, яка уявляє собою спіраль Ферма; б – масив сонячних батарей у вигляді спіралі.

Таким чином, спіраль Ферма має різноманітні застосування в різних галузях науки і виробництва. В математиці це апроксимація кривих, таких як еліпс і гіпербола; в фізиці – моделювання спіральних галактик, опис руху заряджених частинок у магнітному полі; в мистецтві – створення декоративних візерунків і форм, ілюстрація математичних понять тощо.

Спіраль літуус. Літуус означає «гак», де мається на увазі єпископський посох (рис. 21). Літуус – це геометричне місце точки, яка рухається таким чином, що площа кругового сектора залишається постійною.

Рис. 21 Жрець з літуусом. Ілюстрація до «Декад» Тита Лівія (1583 р.)

Якщо в узагальненому рівнянні спіралі Архімеда в полярних координатах $\rho = b + a\varphi^{\frac{1}{n}}$ надати n значення –2, то отримаємо рівняння спіралі літуус. Інший варіант рівняння літууса можна отримати, якщо дослідити інверсію спіралі Ферма на одиничному колі, яка в полярних координатах (ρ, φ) буде мати вигляд:

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{\varphi}}.$$

Таким чином, показано, що образ спіралі Ферма $\rho = a\sqrt{\varphi}$ при інверсії на одиничному колі уявляє собою літуусну спіраль. На рис. 22 спіраль Ферма показано зеленим кольором, одиничне коло – червоним, а літуус – синім.

Для літууса кут φ є обернено пропорційним до квадрату радіуса ρ, тому така спіраль має дві гілки, які формуються в залежності від знаку радіуса ρ. Крива асимптотично наближується до осі x.

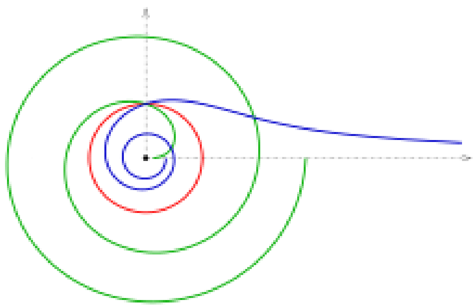


Рис. 22. Спіраль літуус

Гіперболічна спіраль – це плоска трансцендентна крива, яка утворюється рухом точки вздовж прямої, яка обертається таким чином, що відстань точки від центру обертання завжди буде обернено пропорційна куту повороту прямої, який вимірюється від початкового положення. Якщо в узагальнене рівняння спіралі Архімеда в полярних координатах $\rho = b + a\varphi^{\frac{1}{n}}$ підставити значення $n = –1$, то отримаємо рівняння гіперболічної спіралі $\rho = \frac{a}{\varphi}$. Це рівняння є зворотним до рівняння Архімедової спіралі і записується звичайно таким чином: ρφ = a, а рівняння в декартових координатах має вигляд: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Параметричний запис рівняння буде таким:

Гіперболічна спіраль складається із двох гілок, симетричних відносно прямої d, та має асимптоту $y = a$ (рис. 23). При x, що прагне до нескінченності, ордината прагне до a (в декартових координатах).

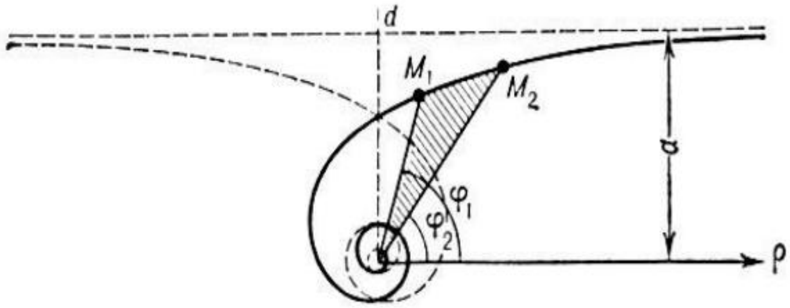


Рис. 23. Гіперболічна спіраль

Гіперболічна спіраль і спіраль Архімеда можуть бути отримані одна з одної інверсією щодо полюса О. Гіперболічна спіраль – це окремий випадок так званих алгебраїчних спіралей.

Гіперболічні спіралі мають застосування в різних галузях, таких як: астрономія (моделювання орбіт планет і галактик), математика (побудова графіків і вивчення особливих точок), фізика (опис траєкторій частинок в магнітних полях).

Рис. 24. Капітель колони іонічного ордера

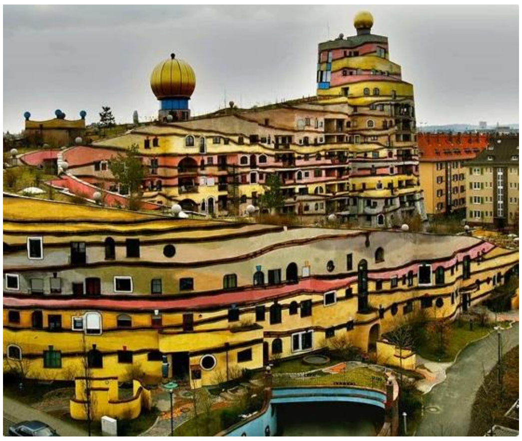
Аналізуючи властивості спіралей, як кривих химерної форми, не можна не згадати таку гілку людської діяльності як будівництво і архітектура. Ще з давніх часів люди прикрашали свої творіння. Однією з таких прикрас є капітелі колон іонічного ордеру (рис. 24), які уявляють собою плавно з’єднані між собою крупні завитки у формі спіралі.

У сучасні часи в архітектурі є тенденція створювати нові оригінальні конструкції, які мають певні переваги перед традиційними будовами, та є особливими і грандіозними.

Розглянемо декілька прикладів таких будівель.

У Тайбеї (столиця Тайвані) побудовано незвичайний будинок у формі подвійної спіралі ДНК (рис.25, ***а***). Це будинок висотою 93,2 метра, тобто майже хмарочос. Він має площу понад 8000 квадратних метрів, всередині є 21 наземний поверх, 20 з яких скручуються по спіралі. Така конструкція не лише візуально цікава, а й має практичне значення. Завдяки такому плануванню всі квартири забезпечені гарним денним освітленням. Будівля унікальна своїм "зеленим" фасадом, де розташовано тисячі дерев і кущів, а чиста енергія для потреб генерується сонячними панелями, які розташовані на даху.

Житловий комплекс, який названо «Лісова спіраль» (рис.25, ***б***), розташований у Дармштадті (Німеччина), спроектовано австрійським архітектором Фріденсрайхом Хундертвассером. Його особливість в тому, що він не має звичних прямокутних форм, а змодельований у формі спіралі.



а *б*

Рис. 25. Будівлі у формі спіралі: а – будинок у формі подвійної спіралі ДНК, Тайбей (Тайвань); б – житловий комплекс «Лісова спіраль», Дармштадт (Німеччина).

Красивою і легкою виглядає конструкція автомобільного мосту під назвою Сан-Шань (в перекладі «Три піки») у Пекіні (Китай), який було побудовано до Зимових Олімпійських ігор 2022 року (рис. 26).

На задум такої незвичайної форми мосту архітекторів надихнула емблема Ігор – олімпійські кільця. Тому опорні троси мосту спроектовані еліптичної форми, які уособлюють символ Олімпіади, а утворюють форму спіралі.

Рис. 26. Автомобільний міст у Пекіні (Китай)

Переходячи до опису наступного будівельного комплексу потрібно згадати про механічний годинник та його центральний вузол – баланс, який впливає на точність роботи годинника. Баланс - це маятникове колесо, яке здійснює коливальні рухи під дією балансової спіралі (рис. 27).

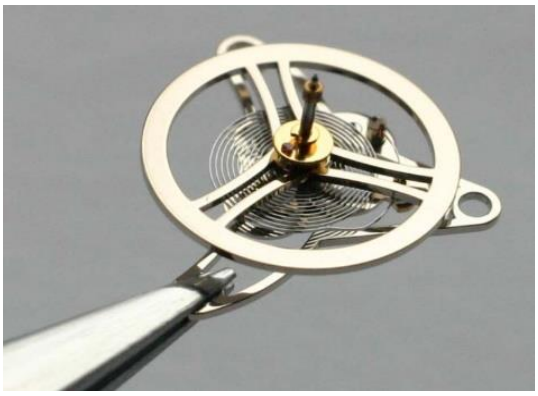


Рис. 27. Маятникове колесо годинника з балансовою спіраллю

Вважається, що коливальну систему "баланс-спіраль" окремо один від одного придумали голландець Хрістіан Гюйгенс (1674 р.) і англійський вчений Роберт Гук. Балансир називають одним з найкорисніших винаходів в історії годинників. Винахід балансу став революцією в годинниковій справі, оскільки саме завдяки ньому годинник зміг стати портативними – спочатку кишеньковими, потім наручними.

У всьому світі швейцарські годинники відомі, як найкращі. А їх виробництво було засновано ще в 1875 р. в долині Жу у Швейцарії біля підніжжя Юрських гір. Тому Музей годинникової мануфактури Audemars Piguet був побудований саме в цій долині (рис. 28). Архітектура музею нагадує гігантську двозахідну спіраль, що випирає з-під землі та розкручується з надр крізь газон. Це є прямим відсиланням до спеціалізації мануфактури, до спіралі балансу — найважливішою складовою годинникового механізму.

Спіраль спирається на стіни з панелей гнутого будівельного скла, що прикрито латунною конструкцією, завдяки якій можна коригувати освітлення і температуру. Футуристична спіраль приєднана до старої будівлі мануфактури 1868 р., з якою утворює єдиний комплекс виставкових просторів.

Рис. 28. Музей годинникової мануфактури, Швейцарія.

Отже, досліджені криві, а саме спіралі Архімеда, Ферма, а також їх інверсії щодо полюса та на одиничному колі у вигляді гіперболічної спіралі та літууса, завдяки своїм геометричним особливостям широко використовуються у багатьох напрямах сучасної людської діяльності. З розвитком науки знаходяться нові сфери їх використання, тому геометричне моделювання та вивчення властивостей різних видів спіралей є необхідною умовою для можливості їх застосування у нових створюваних об'єктах різних галузей промисловості та поширення діапазону їхнього використання.

Висновки та перспективи. 1. В роботі проведено геометричне дослідження спіралей Архімеда і Ферма, гіперболічної спіралі та літууса. Надано їх визначення, рівняння в полярних координатах, представлено їхні геометричні моделі, виконано аналіз геометричних особливостей. 2. Підібрано різноманітні приклади природних спіралеобразних явищ і форм та доведено актуальність даного геометричного дослідження різних видів спіралей. 3. Проаналізовано сфери практичного використання у діяльності людини зокрема в архітектурі та машинобудуванні, підібрані найбільш яскраві та характерні приклади, наведені фотографічні зображення. 4. Зроблено висновок про доцільність геометричних досліджень з метою поширення сфер застосування спіралей.

Література

1. *Ботвіновська С.І., Ковальов С.М., Мостовенко О.В.* Властивості деяких параболоїдів n-го порядку. *Управління розвитком складних систем*. Київ : КНУБА, 2015. № 22. С. 134-137. {in Ukrainian}.
2. *Ботвіновська С.І.* Моделювання криволінійних поверхонь об'єктів дизайну та управління їх формою. *Сучасні проблеми архітектури та містобудування*. Київ : КНУБА, 2017. № 47. С.451 – 457. {in Ukrainian}.
3. *Бідніченко О.Г.* Криві та поверхні другого порядку в природі та архітектурних спорудах. Міжвідомчий науково-технічний збірник *«Прикладна геометрія та інженерна графіка»*. Вип.103. Київ : КНУБА, 2022. – С.3-15. DOI:10.32347/0131-579x.2022.103.{in Ukrainian}.
4. *Бідніченко О.Г.* Прямі лінії та лінійчаті поверхні в науці, природі та архітектурних спорудах. Міжвідомчий науково-технічний збірник *«Прикладна геометрія та інженерна графіка»*. Вип.104. Київ : КНУБА, 2023. С.3-15. dx.doi.org/https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.104. {in Ukrainian}.
5. *Бідніченко О.Г.* Лінійчаті, але не плоскі поверхні в науці, техніці та архітектурних спорудах. Міжвідомчий науково-технічний збірник *«Прикладна геометрія та інженерна графіка»*. Вип.105. Київ : КНУБА, 2023. С.3-15. dx.doi.org/https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.105. {in Ukrainian}.
6. *Бідніченко О.Г.* Геометричне моделювання гвинтових циліндричних поверхонь та їх практичне застосування. Міжвідомчий науково-технічний збірник *«Прикладна геометрія та інженерна графіка»*. Вип.106. Київ: КНУБА, 2023. С.3-14. dx.doi.org/https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.106. {in Ukrainian}.
7. *Ковальов С.М., Ботвіновська, С.І., Золотова А.В.* Геометричне моделювання поверхонь із заданими властивостями у дизайні та

архітектурі. Управління розвитком складних систем. Київ : КНУБА, 2016. № 25. С. 121-126. {inUkrainian}.
8. https://newacropolis.org.ua/articles/spiral
9. https://uk.wikipedia.org/wiki/Спіраль
10. https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat%27s_spiral
11. https://mathworld.wolfram. com/ArchimedesSpiral.html
12. *Фіхтенгольц Г.М.* Курс диференціального та інтегрального числення. 2024. 2403с. (укр).
13. *В. В. Булдигін, І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей* та інш. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: навч. посібник: за ред. проф. В. В. Булдигіна. Київ : ТВіМС, 2011. 224 с.

Referances

1. *Botvinovs'ka S.I., Koval'ov S.M., Mostovenko O.V.* Vlastyvosti deyakykh paraboloyidiv n-ho poryadku. *Upravlinnya rozvytkom skladnykh system*. Kyiv : KNUBA, 2015. № 22. S. 134-137. .{in Ukrainian}.
2. *Botvinovs'ka S.I.* Modelyuvannya kryvoliniynykh poverkhonʹ obʺyektiv dyzaynu ta upravlinnya yikh formoyu. *Suchasni problemy arkhitektury ta mistobuduvannya*. Kyiv : KNUBA, 2017. № 47. S.451 – 457. {in Ukrainian}.
3. *Bidnichenko O.H.* Kryvi ta poverkhni druhoho poryadku v pryrodi ta arkhitekturnykh sporudakh. Mizhvidomchyy naukovo-tekhnichnyy zbirnyk *«Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika»*. Vol. 103. Kyiv: KNUBA, 2022. C. 3-15. DOI:10.32347/0131-579x.2022.103.{in Ukrainian}.
4. *Bidnichenko O.H.* Pryami liniyi ta liniychati poverkhni v nautsi, pryrodi ta arkhitekturnykh sporudakh. Mizhvidomchyy naukovo-tekhnichnyy zbirnyk *«Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika»*. Vol. 104. Kyiv: KNUBA, 2023. S. 3-15. dx.doi.org/https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.104. {in Ukrainian}.
5. *Bidnichenko O.H.* Liniychati, ale ne ploski poverkhni v nautsi, tekhnitsi ta arkhitekturnykh sporudakh. Mizhvidomchyy naukovo-tekhnichnyy zbirnyk *«Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika»*. Vol. 105. Kyiv: KNUBA, 2023. S. 3-15. dx.doi.org/https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.105. {in Ukrainian}.
6. *Bidnichenko O.H.* Heometrychne modelyuvannya hvyntovykh tsylindrychnykh poverkhonʹ ta yikh praktychne zastosuvannya. Mizhvidomchyy naukovo-tekhnichnyy zbirnyk «Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika». Volp. 106. Kyiv: KNUBA, 2023. S. 3-14. dx.doi.org/https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.106. {in Ukrainian}.
7. *Koval'ov S.M., Botvinovs'ka, S.I., Zolotova A.V.* Heometrychne modelyuvannya poverkhonʹ iz zadanymy vlastyvostyamy u dyzayni ta arkhitekturi. Upravlinnya rozvytkom skladnykh system. Kyiv : KNUBA, 2016. № 25. S. 121 – 126. .{in Ukrainian}.
8. https://newacropolis.org.ua/articles/spiral
9. https://uk.wikipedia.org/wiki/Спіраль
10. https://en.wikipedia.org/wiki/Fermat%27s_spiral
11. https://mathworld.wolfram. com/ArchimedesSpiral.html
12. *Fikhtenhol'ts H.M.* Kurs dyferentsialʹnoho ta intehralʹnoho chyslennya. 2024. 2403s. (ukr).
13. *V.V. Buldyhin, I. V. Alieksieieva, V. O.* Haidei ta insh. Liniina alhebra ta analitychna heometriia: navch. posibnyk: za red. prof. V. V. Buldyhina. Kyiv : TViMS, 2011. 224 s.

Ph. D., assoc. prof **Helen Bidnichenko**
helenbidnichenko@gmail.com, ORCID: 0000-0002-0548-3481
Admiral Makarov National University of Shipbuilding (Mykolaiv)

FEATURES OF THE GEOMETRY OF SPIRALS AND THEIR NATURAL AND PRACTICAL APPLICATION

This work is devoted to the topical issue of geometric modeling of some types of spirals and their practical application in nature and various areas of human activity. A geometric and practical study of Archimedes' spiral and its inversion with respect to the pole - a hyperbolic spiral, as well as Fermat's spiral and its inversion on a circle of unit radius - lituus, was carried out. A mathematical description of spirals is presented and their geometric models are developed: definitions and equations in polar coordinates are provided, graphic formation schemes and algorithms for their construction are created. A comparative analysis of the researched types of spirals in relation to the oldest spiral of Archimedes, which was found for the first time in the III century BC, was carried out, and the geometric properties that distinguish the types of researched spirals from each other were determined. Special attention is paid to the study of spiral forms in the natural environment and in practical application. Various examples of natural spiral phenomena and forms are selected in the article, which proves the relevance of this geometric study of various types of spirals. It is shown that due to their geometric features, spirals are widely used in many areas of modern human activity: technology, physics, mathematics, astronomy, art, everyday life, etc. Products with spiral surfaces are used in various industries: oil, chemical, food, etc. Special attention is paid to highlighting spirals in architectural forms. The most vivid and characteristic examples of the use of various types of spirals are selected, and photographic images are given. It was concluded that with the development of science, there are new areas of use of the studied types of spirals, therefore, geometric research is a necessary condition for the possibility of using spirals in newly created objects of various industries and expanding the range of their application.

*Keywords*__:__ *geometric modeling; spiral; spiral phenomena; mathematical model; types of spirals; practical application.*