

к. т. н., доцент **Кресан Т.А.**,

tanyakresan@i.ua ORCID 0000-0002-8280-9502

д. т. н., професор **Пилипака С.Ф.**,

s.pylypaka@nubip.edu.ua ORCID 0000-0002-1496-4615

к. т. н., доцент **Пилипака Т.С.**,

t.s.pylypaka@nuwm.edu.ua ORCID 0009-0000-5582-1859

к. т. н. **Кремець Я.С.**,

kremets063@gmail.com ORCID 0000-0002-2120-4438

к. т. н., доцент **Грищенко І.Ю.**,

irgr@yahoo.com ORCID 0000-0002-1000-9805

Національний університет біоресурсів і природокористування України

ЗГИНАННЯ ПОВЕРХОНЬ БІНОРМАЛЕЙ ЛІНІЙ УКОСУ

Розглянуто згинання поверхонь бінормалей деформацією напрямної кривої, яка є лінією укусу. При такій деформації змінюється кривина кривої, однак вона залишається лінією укусу. Прямолінійні твірні поверхні при деформації кривої збігаються із ортом бінормалі супровідного тригранника у всіх її точках. Складено параметричні рівняння неперервного згинання цих поверхонь зміною кута підйому напрямної лінії укусу. Вихідна крива укусу задається кутом її підйому і закономірністю зміни кривини у функції довжини дуги. Розглянуто частковий випадок, коли кривина вихідної кривої є стала. Показано, що в такому випадку множиною згинань поверхні є гелікоїди, включаючи гвинтовий коноїд. Розглянуто конкретні приклади. За отриманими рівняннями побудовано поверхні, які є згинаннями вихідної.

Ключові слова: напрямна крива; лінія укусу; згинання; гелікоїди; перша квадратична форма; поверхня бінормалей.

Постановка проблеми. Вчення про згинання є важливим розділом диференціальної геометрії поверхонь. Найбільш вивченим в теоретичному плані є згинання розгортних поверхонь, тому що окремий випадок згинання таких поверхонь на площину, тобто одержання розгорток, носить прикладний характер. Загальновідомою є теорема про можливість згинання гвинтових поверхонь на поверхні обертання. Класичним прикладом служить згинання гвинтового коноїда в катеноїд. Гвинтові лінії поверхні при її згинанні поступово деформуються, їх крок зменшується, аж поки не перетворяться у паралелі поверхні обертання. Нерозгортні лінійчаті поверхні теж можна згинати подібно до розгортних, тобто деформувати напрямну криву таким чином, щоб прямолінійні твірні залишалися прямолінійними. Саме такому згинанню лінійчатих

нерозгортних поверхонь присвячена дана стаття, де напрямною кривою поверхні виступає лінія укосу.

Аналіз останніх досліджень. Проблеми згинання присвячені окремі розділи підручників із диференціальної геометрії, а також ґрунтовні наукові дослідження. Деякі праці стосуються випадків згинання окремих класів поверхонь: гвинтових, поверхонь обертання. В праці [2] здійснено неперервне згинання гвинтового коноїда в катеноїд та побудовано деякі проміжні положення поверхні.

Ціль статті. Здійснити згинання поверхні біномалей ліній укосу та навести аналітичний опис процесу згинання в загальному вигляді.

Основна частина. Напряму криву укосу для конструювання поверхні доцільно взяти у функції довжини дуги s , оскільки довжини ліній на поверхні не змінюються при її згинанні. Параметричні рівняння кривої укосу мають вигляд [1]:

$$\begin{aligned} x &= \cos \beta \int \cos \left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right) ds; \\ y &= \cos \beta \int \sin \left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right) ds; \\ z &= s \sin \beta, \end{aligned} \quad (1)$$

де $k=k(s)$ – залежність кривини k кривої від довжини її дуги s ;

β – кут підйому лінії укосу – стала величина. Всі дотичні до кривої (1) нахилені під кутом β до горизонтальної площини.

Щоб провести через криву (1) поверхню біномалей, потрібно мати вирази напрямних косинусів вектора біномалі. Вони визначаються через перші і другі похідні кривої (1) і мають вигляд:

$$\begin{aligned} l &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \\ m &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \\ n &= \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \end{aligned} \quad (2)$$

де $A = y'z'' - y''z'$; $B = z'x'' - z''x'$; $C = x'y'' - x''y'$.

Знаходимо перші і другі похідні рівнянь (1):

$$\begin{aligned} x' &= \cos \beta \cos \left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right); \\ y' &= \cos \beta \sin \left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right); \\ z' &= \sin \beta. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
x'' &= -k \sin\left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds\right); \\
y'' &= k \cos\left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds\right); \\
z'' &= 0.
\end{aligned}
\tag{4}$$

Після підстановки перших (3) і других (4) похідних у (2) отримаємо:

$$\begin{aligned}
l &= -\sin \beta \cos\left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds\right); \\
m &= -\sin \beta \sin\left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds\right); \\
n &= \cos \beta.
\end{aligned}
\tag{5}$$

Запишемо параметричні рівняння лінійчатої поверхні, яка проходить через криву (1) і прямолінійні твірні якої паралельні одиничному вектору (5):

$$\begin{aligned}
X &= \cos \beta \int \cos\left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds\right) ds - u \sin \beta \cos\left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds\right); \\
Y &= \cos \beta \int \sin\left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds\right) ds - u \sin \beta \sin\left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds\right); \\
Z &= s \sin \beta + u \cos \beta,
\end{aligned}
\tag{6}$$

де u – друга незалежна змінна поверхні, відлік якої починається від точки на напрямній кривій.

Рівняння (6) є параметричними рівняннями поверхні бінормалей лінії укосу (1). Відомо, що при згинанні поверхні коефіцієнти першої квадратичної форми E, F, G залишаються незмінними. Для їх знаходження нам потрібні частинні похідні рівнянь поверхні (6):

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial s} &= \cos \beta \cos \left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right) + uk \operatorname{tg} \beta \sin \left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right); \\ \frac{\partial Y}{\partial s} &= \cos \beta \sin \left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right) - uk \operatorname{tg} \beta \cos \left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right); \\ \frac{\partial Z}{\partial s} &= \sin \beta; \\ \frac{\partial X}{\partial u} &= -\sin \beta \cos \left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right); \\ \frac{\partial Y}{\partial u} &= -\sin \beta \sin \left(\frac{1}{\cos \beta} \int k ds \right); \\ \frac{\partial Z}{\partial u} &= \cos \beta.\end{aligned}\tag{7}$$

Знаходимо коефіцієнти E, F, G :

$$\begin{aligned}E &= \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u} \right)^2 = 1; \\ F &= \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial s} + \frac{\partial Y}{\partial u} \cdot \frac{\partial Y}{\partial s} + \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial Z}{\partial s} = 0; \\ G &= \left(\frac{\partial X}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial s} \right)^2 = 1 + u^2 k^2 \operatorname{tg}^2 \beta.\end{aligned}\tag{8}$$

Коефіцієнти E і F є сталими. Проаналізуємо вираз коефіцієнта G . До нього входить добуток $k \cdot \operatorname{tg} \beta$. Відомо, що між кривиною і скрутом лінії укосу існує лінійна залежність, в якій коефіцієнтом пропорціональності служить $\operatorname{tg} \beta$. Добуток $k \cdot \operatorname{tg} \beta = \sigma$, де σ – скрут кривої. Саме такий результат наведено в підручнику для виразу коефіцієнта G , в якому замість $k^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \beta$ наведено σ^2 – $G = 1 + u^2 \sigma^2$. Це означає, що на жодний із виразів коефіцієнтів E, F, G не впливає залежність кривини $k = k(s)$. Звідси випливає, що напрямну криву (1) можна деформувати зміною її кривини, зберігаючи при цьому незмінною залежність $\sigma = \sigma(s)$.

Виходячи із цього, можемо записати: $\sigma = \sigma_b$, або $k \cdot \operatorname{tg} \beta = k_b \cdot \operatorname{tg} \beta_b$, де індексом “ b ” позначено параметри кривої після її деформації. Будемо керувати формою кривої величиною її кута підйому. Для зміни кута підйому введемо сталу p . Після деформації кривої її кут підйому набуде значення $\beta_b = p \cdot \beta$. Із рівності скруту напрямної кривої до і після згинання запишемо: $k \cdot \operatorname{tg} \beta = k_b \cdot \operatorname{tg} p \beta$. Звідси визначаємо залежність кривини напрямної кривої після зміни її кута підйому:

$$k_b = \frac{k \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} p\beta} = k \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} p\beta. \quad (9)$$

Підставимо в рівняння кривої укосу (1) нові значення кута $\beta_b = p \cdot \beta$ і кривини k_b із (9):

$$\begin{aligned} x_b &= \cos p\beta \int \cos \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin p\beta} \int k ds \right) ds; \\ y_b &= \cos p\beta \int \sin \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin p\beta} \int k ds \right) ds; \\ z_b &= s \sin p\beta, \end{aligned} \quad (10)$$

Крива укосу (10) має однакову закономірність зміни скруту $\sigma = \sigma(s)$ незалежно від значення параметра p . При $p=1$ параметричні рівняння (10) кривої перетворюються в рівняння (1).

Знайдемо напрямні косинуси вектора бінормалі кривої (10) як ми це робили для кривої (1). Після знаходження перших і других похідних рівнянь (10) і підстановки них в (2) отримаємо:

$$\begin{aligned} l_b &= -\sin p\beta \cos \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin p\beta} \int k ds \right); \\ m_b &= -\sin p\beta \sin \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin p\beta} \int k ds \right); \\ n_b &= \cos p\beta. \end{aligned} \quad (11)$$

Параметричні рівняння поверхні бінормалей, що проходить через напрямну криву (10) з прямолінійними твірними, напрям яких задано одиничним вектором (11), запишуться:

$$\begin{aligned} X_b &= \cos p\beta \int \cos \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin p\beta} \int k ds \right) ds - u \sin p\beta \cos \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin p\beta} \int k ds \right); \\ Y_b &= \cos p\beta \int \sin \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin p\beta} \int k ds \right) ds - u \sin p\beta \sin \left(\frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin p\beta} \int k ds \right); \\ Z_b &= s \sin p\beta + u \cos p\beta. \end{aligned} \quad (12)$$

При $p=1$ рівняння (12) перетворюються у рівняння (6). Якщо знайти коефіцієнти першої квадратичної форми, як ми це робили для рівнянь (6), то вони точно збігатимуться із коефіцієнтами (8). Це означає, що стала p не входить до виразу першої квадратичної форми, тобто не впливає на неї, але впливає на форму поверхні. Це означає, що стала p є параметром згинання.

При згинанні поверхня деформується так, що кут підйому напрямної кривої $\beta_b = p \cdot \beta$ набуває нового значення в залежності від значення сталої p .

Розглянемо конкретні приклади. Нехай кривина буде задана залежністю $k = a/s$, де a – стала величина. Підстановка цього виразу кривини в (10) із наступним інтегруванням дає наступні рівняння:

$$x_b = \frac{s \cos \beta \sin 2p\beta \left(\cos \beta \sin p\beta \cos \frac{a \operatorname{tg} \beta \ln s}{\sin p\beta} + a \sin \beta \sin \frac{a \operatorname{tg} \beta \ln s}{\sin p\beta} \right)}{2 \cos^2 \beta \sin^2 p\beta + 2a^2 \sin^2 \beta};$$

$$y_b = \frac{s \cos \beta \sin 2p\beta \left(\cos \beta \sin p\beta \sin \frac{a \operatorname{tg} \beta \ln s}{\sin p\beta} - a \sin \beta \cos \frac{a \operatorname{tg} \beta \ln s}{\sin p\beta} \right)}{2 \cos^2 \beta \sin^2 p\beta + 2a^2 \sin^2 \beta}; \quad (13)$$

$$z_b = s \sin p\beta.$$

Крива (13) розташована на поверхні обертання. Відстань від точки на кривій до осі OZ знайдемо із виразу: $\rho = \sqrt{x_b^2 + y_b^2}$. Вираз $\rho = \rho(s)$ разом із залежністю $z_b = z_b(s)$ є параметричними рівняннями меридіана поверхні обертання. Дотична до меридіана складає кут ψ із горизонтальною прямою, який визначається із виразу:

$$\psi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{a^2 \sin^2 \beta + \cos^2 \beta \sin^2 p\beta}}{\cos \beta \cos p\beta} \right). \quad (14)$$

Кут ψ згідно (14) є сталим, отже меридіан є прямою лінією, а поверхня обертання – конусом (рис. 1, фронтальна проекція). Вираз (14) дає можливість задати вихідну криву за заданими кутами β і ψ при $p=1$, тобто знайти значення сталої a :

$$a = \cos \beta \operatorname{ctg} \beta \sqrt{\operatorname{tg}^2 \psi - \operatorname{tg}^2 \beta}. \quad (15)$$

Для заданих кутів $\beta = 20^\circ$ і $\psi = 60^\circ$ за формулою (15) знаходимо $a = 4,37$. На рис. 1, a побудована вихідна крива укусу за рівняннями (13) при $p=1$, $\beta = 20^\circ$ і $a = 4,37$. Вона розташована на конусі із заданим кутом нахилу твірних $\psi = 60^\circ$. При згинанні поверхні вихідна крива трансформується, залишаючись на конусі, кут ψ якого теж змінюється. Наприклад, при $p=0,5$ кут підйому становить: $\beta_b = 0,5\beta = 10^\circ$. Кут ψ_b знаходимо за формулою (14) при $p=0,5$, $a=4,37$ і $\beta=20^\circ$: $\psi_b = 58,4^\circ$. Трансформована крива побудована на рис. 1, б,

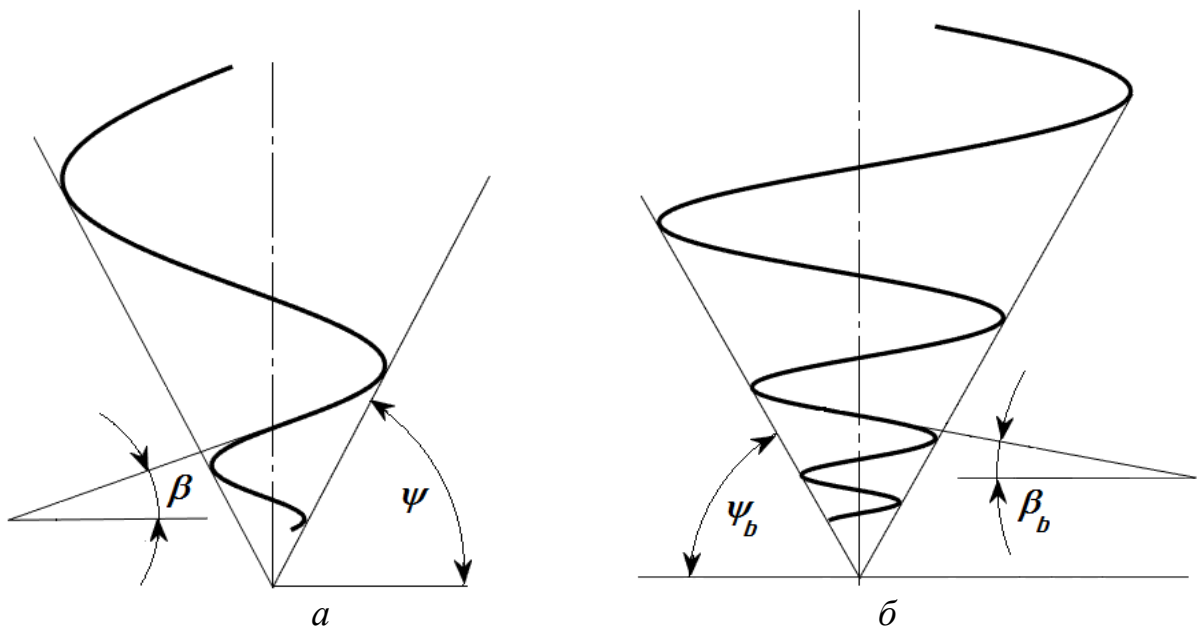


Рис. 1. Конічна крива укусу, побудована за рівняннями (13) при $a=4,37$ і $\beta=20^\circ$:
 а) вихідна крива при $p=1$; б) трансформована крива при $p=0,5$

Параметричні рівняння множини поверхонь, залежних від значення параметра p , одержимо із (12) при підстановці залежності $k=a/s$ з наступним інтегруванням:

$$X_b = \frac{s \cos \beta \sin 2p\beta \left(\cos \beta \sin p\beta \cos \frac{a \operatorname{tg} \beta \ln s}{\sin p\beta} + a \sin \beta \sin \frac{a \operatorname{tg} \beta \ln s}{\sin p\beta} \right)}{2 \cos^2 \beta \sin^2 p\beta + 2a^2 \sin^2 \beta} - u \sin \beta \cos \frac{a \operatorname{tg} \beta \ln s}{\sin p\beta};$$

$$Y_b = \frac{s \cos \beta \sin 2p\beta \left(\cos \beta \sin p\beta \sin \frac{a \operatorname{tg} \beta \ln s}{\sin p\beta} - a \sin \beta \cos \frac{a \operatorname{tg} \beta \ln s}{\sin p\beta} \right)}{2 \cos^2 \beta \sin^2 p\beta + 2a^2 \sin^2 \beta} - u \sin \beta \sin \frac{a \operatorname{tg} \beta \ln s}{\sin p\beta}; \quad (16)$$

$$Z_b = s \sin p\beta + u \cos p\beta.$$

За рівняннями (16) на рис. 2 побудовано поверхні бінормалей лінії укусу (13) зміною кута її підйому. Напрямна крива зображена потовщеною лінією. При $p=1$ маємо вихідну поверхню. По мірі зростання параметра p зростає кут підйому β_b напрямної кривої. При $\beta_b=90^\circ$ напрямна крива перетворюється у вертикальну пряму, а прямолінійні твірні поверхні стають паралельними до горизонтальної площини. Це впливає із того, що проекція напрямного вектора твірної на вісь OZ згідно (11) стає рівною нулю.

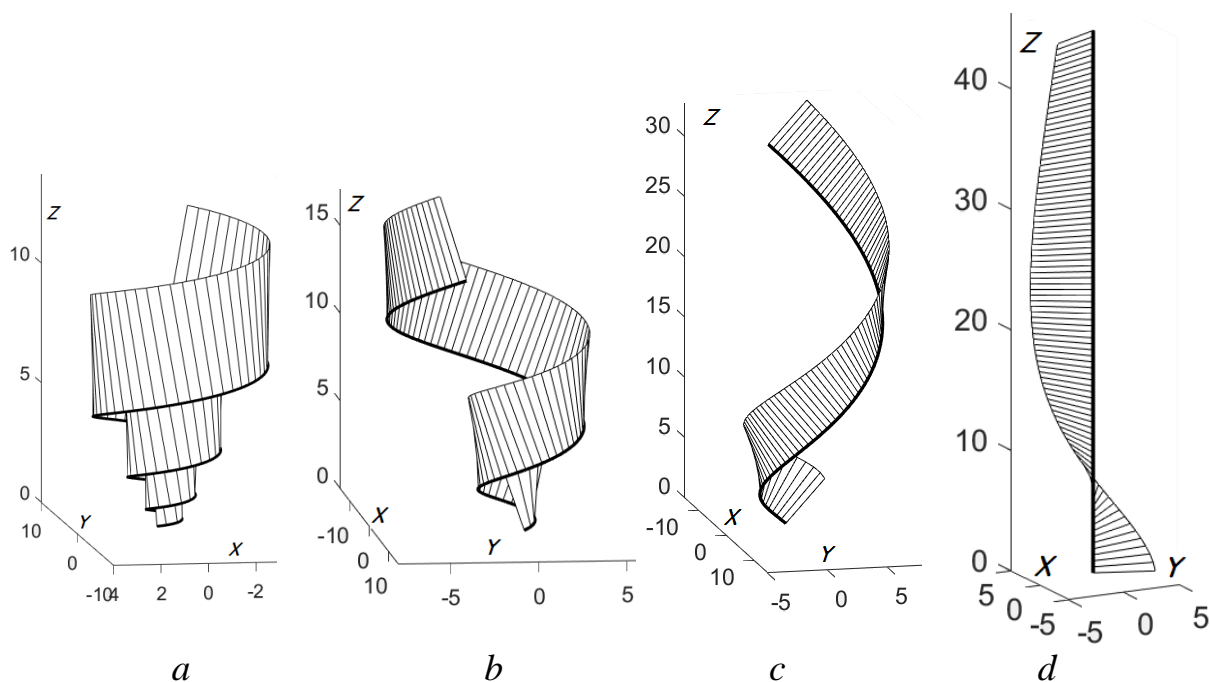


Рис. 2. Проміжні положення поверхні бінормалей лінії укосу (13) при її згинанні:
 а) $p=0,5$; б) $p=1$; в) $p=2$; г) $p=4,5$

Розглянемо ще один випадок, коли кривина вихідної кривої стала, тобто $k=const$. Після інтегрування виразів, що входять до рівнянь (12), отримаємо:

$$\begin{aligned}
 X_b &= \frac{\sin 2p\beta}{2k \operatorname{tg}\beta} \sin \frac{kst \operatorname{tg}\beta}{\sin p\beta} - u \sin p\beta \cos \frac{kst \operatorname{tg}\beta}{\sin p\beta}; \\
 Y_b &= -\frac{\sin 2p\beta}{2k \operatorname{tg}\beta} \cos \frac{kst \operatorname{tg}\beta}{\sin p\beta} + u \sin p\beta \sin \frac{kst \operatorname{tg}\beta}{\sin p\beta}; \\
 Z_b &= s \sin p\beta + u \cos p\beta.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Напрямною кривою в рівняннях (17) служить гвинтова лінія. Перейдемо від її кривини k до більш звичного параметра – радіуса r циліндра, на якому вона розташована. Кривину гвинтової лінії можна визначити через радіус r і гвинтовий параметр b :

$$k = \frac{r}{r^2 + b^2}. \tag{18}$$

Гвинтовий параметр b визначається через радіус r і кут β підйому гвинтової лінії: $b=r \operatorname{tg}\beta$. Із врахуванням цього кривина k (18) набуває вигляду:

$$k = \frac{\cos^2 \beta}{r}. \tag{19}$$

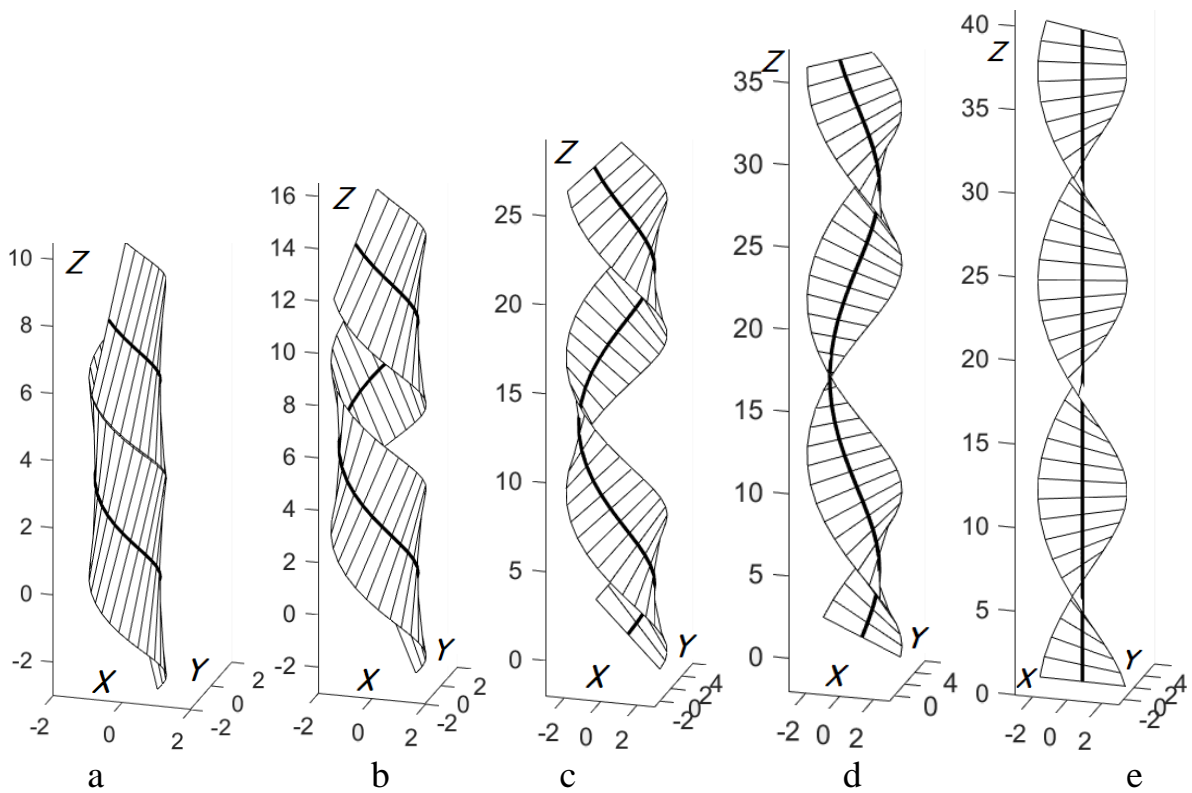


Рис. 3. Проміжні положення поверхні біномалей гвинтової лінії при її згинанні:
 а) $p=0,3$; б) $p=0,5$; в) $p=1$; г) $p=1,5$; е) $p=2$

Після підстановки виразу кривини k (19) у рівняння (17) отримаємо параметричні рівняння множини поверхонь, які є згинаннями поверхні біномалей гвинтової лінії. Для виокремлення певної проміжної поверхні із множини потрібно задати конкретне значення параметра p :

$$\begin{aligned}
 X_b &= \frac{r \sin 2p\beta}{\sin 2\beta} \sin \frac{s \sin 2\beta}{2r \sin p\beta} - u \sin p\beta \cos \frac{s \sin 2\beta}{2r \sin p\beta}; \\
 Y_b &= -\frac{r \sin 2p\beta}{\sin 2\beta} \cos \frac{s \sin 2\beta}{2r \sin p\beta} + u \sin p\beta \sin \frac{s \sin 2\beta}{2r \sin p\beta}; \\
 Z_b &= s \sin p\beta + u \cos p\beta.
 \end{aligned} \tag{20}$$

За рівняннями (20) на рис. 3 побудовано окремі поверхні біномалей гвинтової лінії при її згинанні. Її вихідні дані наступні: $r=2$, $\beta=45^\circ$. Напрямна крива зображена потовщеною лінією. Довжина прямолінійної твірної змінювалася в межах $u=-2,5 \dots 2,5$, тобто вона відкладалася в обидві сторони від напрямної кривої.

При $p=2$, тобто для $\beta_b=90^\circ$ поверхня перетворюється в гвинтовий коноїд (рис. 3, е). Для іншого граничного значення $p=0$ (тобто для $\beta_b=0^\circ$) поверхні не існує. Можна прослідкувати закономірність зміни форми поверхні при її згинанні, аналізуючи зображення на рис. 3 у зворотному порядку. Гвинтовий коноїд трансформується у гелікоїд. Обмежений відсік

поверхні із фіксованою довжиною прямолінійних твірних може утворити замкнену поверхню (рис. 3, а). Подібну розгортну поверхню можна утворити згинанням стрічки листового гнучкого нерозтяжного матеріалу. Такою поверхнею буде циліндр із вертикальними прямолінійними твірними, які не збігатимуться із напрямом біномалі напрямної гвинтової лінії. Аналітичний опис процесу згинання в обох випадках ґрунтується на математичних залежностях диференціальної геометрії, які описують згинання лінійчатих поверхонь в цілому.

Висновки. Згинання лінійчатих нерозгортних поверхонь можна здійснювати подібно до розгортних, тобто із збереженням прямолінійних твірних. Частковим випадком такого згинання є згинання поверхні біномалей напрямної просторової кривої. При згинанні поверхні напрямна крива деформується таким чином, що її скрут у функції довжини дуги залишається незмінним. На прикладі кривих укусу, які є наярними кривими поверхні біномалей, отримано узагальнені параметричні рівняння згинання таких поверхонь зміною кута їх підйому. При зростанні цього кута до граничного значення, рівному 90° , поверхня трансформується так, що крива укусу перетворюється у пряму. Результатом згинання поверхні біномалей гвинтової лінії є гелікоїди і гвинтовий коноїд при граничному значенні кута підйому, рівному 90° .

Література

1. *Войтюк Д.Г., Пилипака С.Ф.* Конструювання просторової кривої лінії із заданою кривиною, як траєкторії руху матеріальної точки. *Збірник наукових праць НАУ «Механізація сільськогосподарського виробництва»*. 2001. Т. 10. С. 74 – 78.
2. *Пилипака С.Ф.* Неперервне згинання катеноїда в гвинтовий коноїд. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 1998. Вип. 63. С. 80-83.
3. *Pylypaka S., Kresan T., Trokhaniak O., Taras, I., Demchuk I.* Parametric Equations of a Spatial Curve as a Function of Length of the Arc with Given Dependences of Curvature and Angle of Ascent. *Journal for Geometry and Graphics*. Volume 25, 2021, No. 2, Pp. 163-170. URL: <https://www.heldermann-verlag.de/jgg/jgg25/j25h2pyly.pdf>
4. *Wallner, J.* Ruled surfaces and developable surfaces. *Graz University of Technology*. 2017; 24 p. URL: <https://www.geometrie.tugraz.at/wallner/kurs.pdf>
5. *Tang, C., Bo, P., Wallner, J., & Pottmann, H.* Interactive design of developable surfaces. *ACM Trans. Graph.* 2015; 35(2). DOI: 10.1145/2832906

References:

1. *Voituk, D.G., & Pylypaka, S.F.* Constructing a spatial curve with a given curvature, as a trajectory of motion of a material point. *Collection of scientific*

works of the National Agrarian University «Mechanization of agricultural production» 2001, Vol.10. Pp. 74 - 78.

2. Pylypaka, S.F. Continuous bending of the catenoid into a screw conoid. *Applied geometry and eng. graphics*. Kyiv. 1998. Vol. 63, Pp. 80-83.

3. Pylypaka S., Kresan T., Trokhaniak O., Taras, I., Demchuk I. Parametric Equations of a Spatial Curve as a Function of Length of the Arc with Given Dependences of Curvature and Angle of Ascent. *Journal for Geometry and Graphics*. Volume 25, 2021, No. 2, Pp. 163 - 170. URL: <https://www.heldermann-verlag.de/jgg/jgg25/j25h2pyly.pdf>

4. Wallner, J. Ruled surfaces and developable surfaces. *Graz University of Technology*. 2017. 24 p. URL: <https://www.geometrie.tugraz.at/wallner/kurs.pdf>

5. Tang, C., Bo, P., Wallner, J., & Pottmann, H. Interactive design of developable surfaces. *ACM Trans. Graph.* 2015; 35(2). DOI: 10.1145/2832906

Ph. D., assoc. prof **Tetiana Kresan**,
tanyakresan@i.ua ORCID 0000-0002-8280-9502

Ph. D., prof **Serhiy Pylypaka**,
s.pylypaka@nubip.edu.ua ORCID 0000-0002-1496-4615

Ph. D., assoc. prof **Taras Pylypaka**,
t.s.pylypaka@nuwm.edu.ua ORCID 0009-0000-5582-1859

Ph. D. **Yaroslav Kremets**,
kremets063@gmail.com ORCID 0000-0002-2120-4438

Ph. D., assoc. prof **Iryna Hryshchenko**
irgr@yahoo.com ORCID 0000-0002-1000-9805

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

BENDING OF THE SURFACES OF THE BINORMALS OF THE SLOPE LINES

The bending of the surfaces of the binormals by deformation of the directing curve, which is the slope line, is considered. Such deformation changes the curvature of the curve, but it remains a slope line. The rectilinear generators of the surfaces at deformation of the curve coincide with the unit binormal of the accompanying trihedral at all its points. Parametric equations of continuous bending of these surfaces have been made by changing the angle of inclination of the directional slope line. The initial slope curve is given by the angle of its rise and the conformity of change of curvature as a function of arc length. The partial case where the curvature of the initial curve is constant is considered. In this case, it is shown that helicoids, including the screw conoid, are the set of surface bends. Specific examples are considered. According to the obtained equations, the surfaces that are the bending of the initial are constructed.

The doctrine of bending is an important part of the differential geometry of surfaces. The most studied in theoretical terms is the bending of the developable surfaces, because the particular case of bending such surfaces on the plane, that is, obtaining an involute, is applied. It is a well-known theorem on the possibility of bending screw surfaces into the surfaces of revolution. A classic example is the bending of a screw conoid into a catenoid. Screw lines of a surface at its bending gradually deform, their step decreases, until they turn into the parallels of a surface of revolution. Nondevelopable ruled surfaces can also be bent like developable ones, that is, deform the directing curve in such a way that rectilinear generators remain straight. This article is devoted to this bending of ruled non developable surfaces, where the slope line is a directing curve of the surface.

Bending of linear unbranched surfaces can be carried out in the same way as unfolded, that is, with the preservation of rectilinear twists. A partial case of such bending is the bending of the surface of the binormals of the spatial curve guide. When the surface is bent, the guide curve is deformed so that its twist as a function of the arc length remains unchanged. Using the example of slope curves, which are directional curves of the surface of binormals, generalized parametric equations of bending such surfaces by changing the angle of their rise are obtained. When this angle increases to a limit value of 90° , the surface is transformed so that the slope curve turns into a straight line. The result of the bending of the surface of the binormals of the helical line is the helicoids and the helical conoid with a maximum lifting angle of 90° .

Keywords: directing curve, slope line, helicoids, first quadratic form, surface of the binormals.