

Національний університет біоресурсів і природокористування України

АНАЛІТИЧНИЙ ЗВ'ЯЗОК МІЖ ТРИГРАННИКОМ ФРЕНЕ НАПРЯМНОЇ КРИВОЇ І ТРИГРАННИКОМ ДАРБУ ЦІЄЇ Ж КРИВОЇ НА ПОВЕРХНІ

Тригранник Френе відіграє надзвичайно велику роль в теорії диференціальної геометрії. Він стосується кривих ліній, яких будемо називати напрямними. В поточній точці напрямної кривої можна однозначно побудувати три взаємно перпендикулярних одиничні орти цього тригранника. Орт дотичної $\bar{\tau}$ спрямований по дотичній до кривої в поточній точці. Орт головної нормалі \bar{n} розташований в площині, яку утворюють три точки кривої по різні сторони від поточної при їх граничному зближенні до поточної точки. Він спрямований до центра кривини кривої. Орт бінормалі \bar{b} перпендикулярний до двох ортів $\bar{\tau}$ і \bar{n} і має напрям за правилом правої системи координат. Таким чином, рух тригранника Френе по напрямній кривій, як твердого тіла, буде визначеним. Його можна описати в нерухомій системі координат через дев'ять напрямних косинусів або через три кути Ейлера в сферичній системі координат, які визначаються через напрямні косинуси. Самі ж напрямні косинуси визначаються через перші і другі похідні рівнянь напрямної кривої.

Тригранник Дарбу теж представляє собою праву систему координат, яка рухається вздовж напрямної кривої, що лежить на поверхні. Його орт дотичної \bar{T} теж спрямований по дотичній до кривої в поточній точці, а інші орти попарно утворюють певний кут ε з ортами тригранника Френе. Це зумовлено тим, що один із ортів тригранника Дарбу є нормаллю \bar{N} до поверхні і утворює із бінормаллю певний кут ε . Відповідно третій орт \bar{R} тригранника Дарбу утворює кут ε з ортом \bar{n} тригранника Френе. Орти \bar{T} і \bar{R} тригранника Дарбу утворюють дотичну площину до поверхні в поточній точці кривої, а відповідні орти $\bar{\tau}$ і \bar{n} тригранника Френе – стичну площину кривої в цій же точці. Таким чином, при русі тригранників Френе і Дарбу по кривій із суміщеними вершинами відбувається поворот навколо спільного орта $\bar{\tau} \equiv \bar{T}$ на кут ε між стичною площиною тригранника Френе і дотичною площиною до поверхні тригранника Дарбу. В окремому випадку (наприклад, для плоскої кривої) ці тригранники збігаються, тобто $\varepsilon=0$.

У статті розглянуто аналітичний зв'язок між тригранниками Френе і Дарбу, тобто знаходження виразу кута ε . Розглянута і обернена задача – визначення руху тригранника Дарбу при заданій закономірності зміни кута ε . Розглянуто частковий випадок і показано, що для плоскої напрямної кривої при $\varepsilon = \text{const}$ множина положень орта \bar{n} утворює розгортну поверхню однакового нахилу твірних. Зокрема, при $\varepsilon = 90^\circ$ такою поверхнею буде циліндр, для якого плоска напрямна крива є ортогональним перерізом, а для $\varepsilon = 0^\circ$ – площина, в якій розташована напрямна крива.

Ключові слова: орти; напрямні косинуси; кути Ейлера; поверхня; стична площина; дотична площина.

Вступ. За допомогою тригранників Френе і Дарбу можна конструювати як лінійчаті, так і нелінійчаті поверхні за заданою напрямною кривою і заданою закономірністю зміни кута ε як у функції довільної змінної (у нашому випадку залежної від довільного параметра α), так і залежної від довжини дуги s напрямної кривої. В останньому випадку розширюються можливості конструювання поверхонь саме завдяки можливості застосування формул Френе, а з іншої сторони ці можливості обмежені із-за того, що серед різноманіття плоских і просторових кривих тільки дуже невелика їх частина може бути описана у функції довжини дуги s . Як правило, ці криві знайдені в результаті багаторічного дослідження багатьох вчених різних країн на предмет їх практичного застосування. Для плоских кривих такі відомості наведені у монографії [1], у якій деякі криві красномовно названі «чудовими кривими». Знаючи положення тригранника Френе в нерухомій системі координат і закономірність зміни кута ε між тригранниками, можна знаходити в нерухомій системі координат також положення тригранника Дарбу.

Огляд літератури і постановка проблеми. В динаміці руху матеріальної точки по поверхні в околі нескінченно малої ділянки прийнято розглядати цей рух по дотичній до поверхні площині, яка відповідає цій ділянці. Оскільки одна із граней тригранника Дарбу є дотичною до поверхні під час його руху по ній, то рівняння руху точки зручно розглядати в проекціях на орти цього тригранника. Частковий випадок такого руху у площині, коли тригранники Френе і Дарбу збігаються, розглянуто в праці [2]. Роль тригранника Френе при аналітичному описі складного руху точки розкрита в праці [3]. Дослідженню руху частинки по нерухомих поверхнях присвячено праці [4, 5]. Якщо крива, вздовж якої рухаються тригранники на поверхні, описана у функції довжини власної дуги, тобто задана у

натуральній параметризації, то в такому випадку можна застосовувати формули Френе. Конструюванню таких кривих присвячена монографія [6], а також праця [7]. Конструювання кривих за іншими вихідними умовами розглянуто в працях [8 – 10]. Криві лінії є основою для конструювання поверхонь. Окремий випадок конструювання поверхні із плоских кривих другого порядку, тобто конічних перерізів, наведено в праці [11].

Мета і задачі дослідження.

Мета дослідження - встановити аналітичний зв'язок між тригранником Френе напрямної кривої і тригранником Дарбу цієї ж кривої на поверхні.

Задачі дослідження – встановити взаємне положення тригранників Френе і Дарбу один відносно одного.

Матеріали та методи проведення досліджень.

Спочатку розглянемо тригранник Френе плоскої напрямної кривої. На рис. 1,а він побудований в точці A кривої, яка розташована в горизонтальній площині нерухомої системи координат $Oxuz$. В даному випадку орт бінормалі \bar{b} паралельний осі Oz і збігається із нормаллю \bar{n} до площини, в якій розташована крива. Якщо взяти криву на поверхні, то в загальному випадку бінормаль \bar{b} і нормаль \bar{n} до поверхні збігатися не будуть. Як уже зазначалося, ділянку поверхні в околі точки A можна замінити дотичною площиною. При нескінченно малому розмірі цієї ділянки вона збігатиметься із дотичною площиною. Отже нормаль \bar{n} до дотичної площини є нормаллю до поверхні в точці A . Але в цьому випадку нормаль \bar{n} до поверхні не збігатиметься із бінормаллю \bar{b} тригранника Френе (рис. 1, б). Між цими векторами утвориться кут ε . Одиничний вектор нормалі \bar{n} буде одним із ортів тригранника Дарбу. Другий орт \bar{T} завжди буде збігатися із ортом $\bar{\tau}$ тригранника Френе, оскільки вони рухаються по одній і тій же кривій. Третій орт \bar{P} тригранника Дарбу перпендикулярний до перших двох, отже він лежить у дотичній до поверхні площині μ . Між ортом \bar{P} і ортом головної нормалі \bar{n} теж буде кут ε (рис. 1, б). Таким чином, при русі двох тригранників по кривій на поверхні між їх ортами \bar{N} і \bar{b} та \bar{P} і \bar{n} попарно існує кут ε , який може бути як сталим, так і змінним. Для випадку кривої, розташованої у горизонтальній площині Oxu (рис. 1, а) ці два тригранники збігатимуться. Однак якщо плоска крива не лежить у горизонтальній площині, то тригранники не збігатимуться (окрім окремих точок).

Розглянемо плоский переріз вертикального циліндра похилою площиною (рис. 1, в). Напрямною кривою є еліпс. Головна нормаль \bar{n} еліпса розташована в його площині і спрямована до центра кривини. Між нею і ортом \bar{P} , який розташований в дотичній площині μ , існує кут ε , який для

точки M рівний $\varepsilon=90^\circ-\beta$, де β – кут нахилу площини еліпса до горизонтальної площини. При русі тригранників по еліпсу величина кута ε змінюватиметься і в точці L буде дорівнювати 90° , оскільки головна нормаль \bar{n} і нормаль до поверхні \bar{N} будуть збігатися. Для гвинтової лінії сталого кроку кут ε при русі тригранників буде сталим і дорівнюватиме 90° .

Знайдемо закономірність зміни кута ε при русі тригранників по еліпсу – похилому перерізі циліндра (рис. 1, в). Параметричні рівняння вертикального циліндра запишуться:

$$X = R \cos \alpha; \quad Y = R \sin \alpha; \quad Z = u, \quad (1)$$

де α – кут повороту точки на циліндрі навколо його осі, u – довжина прямолінійної твірної циліндра, відлік якої починається від основи – незалежні змінні; R – радіус основи.

Якщо циліндр (1) перерізати площиною, нахиленою під кутом β (кут β на рис. 1 не показаний), то в перерізі отримаємо еліпс, параметричні рівняння якого запишуться:

$$x = R \cos \alpha; \quad y = R \sin \alpha; \quad z = R \operatorname{tg} \beta \sin \alpha. \quad (2)$$

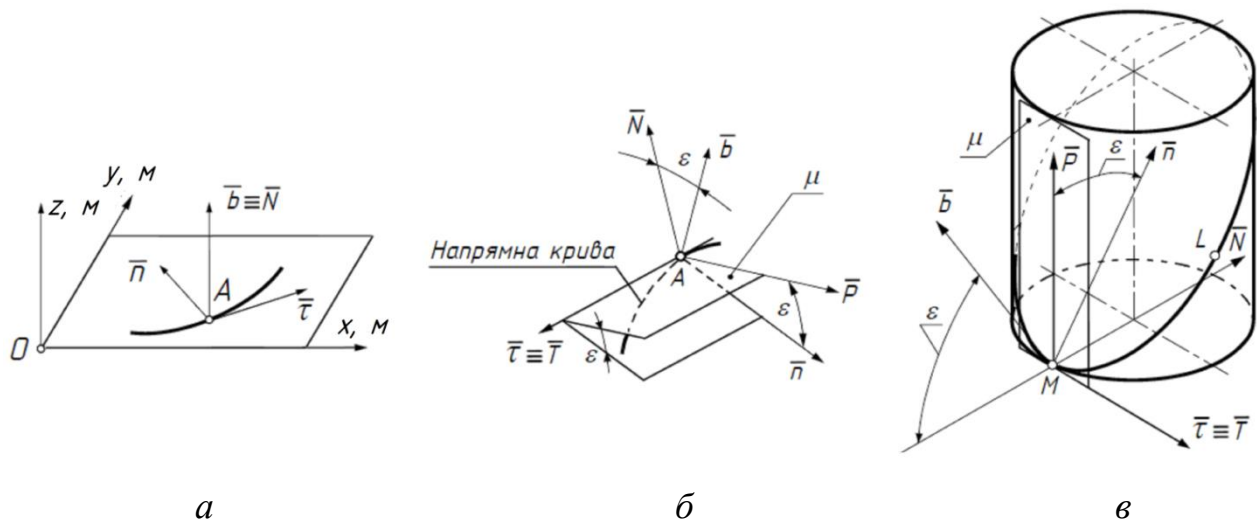


Рис. 1. Графічні ілюстрації до взаємозв'язку між тригранниками Френе і Дарбу:
 а) тригранник Френе плоскої кривої; б) позначення кута ε між ортами тригранників;
 в) тригранники Френе і Дарбу еліпса – похилого перерізу вертикального циліндра

Позначення параметричних рівнянь поверхні (1) виконуємо прописними літерами “ X ”, “ Y ”, “ Z ”, а лінії (2) на його поверхні – строчними. Кут ε між тригранниками будемо шукати, як кут між одиничними ортами \bar{n} і \bar{b} . Напрямок нормалі \bar{n} до поверхні циліндра не залежить від висоти u точки на циліндрі, а тільки від кута α . По суті він збігається із кінцем радіус-вектора,

який описує коло – основу циліндра (два перших вирази у рівняннях (2)). Приведемо його до одиничного (скоротимо на R) і спрямуємо в протилежну сторону, тобто від кола до центру, як зображено на рис. 1, в). Його проєкції на нерухому систему координат $Oxuz$ (на рис. 1, б, в вона умовно відсутня) запишуться:

$$\{-\cos \alpha; \quad -\sin \alpha; \quad 0\}. \quad (3)$$

Проєкції біномалі \bar{b} на нерухому систему координат (тобто напрямні косинуси біномалі) визначаються за відомими формулами через перші і другі похідні напрямної кривої (2) [12]:

$$\cos \alpha_b = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \cos \beta_b = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad \cos \gamma_b = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad (4)$$

де $A = y'z'' - y''z'; \quad B = z'x'' - z''x'; \quad C = x'y'' - x''y'. \quad (5)$

Знаходимо перші і другі похідні кривої (2):

$$x' = -R \sin \alpha; \quad y' = R \cos \alpha; \quad z' = R \operatorname{tg} \beta \cos \alpha. \quad (6)$$

$$x'' = -R \cos \alpha; \quad y'' = -R \sin \alpha; \quad z'' = -R \operatorname{tg} \beta \sin \alpha. \quad (7)$$

Підставимо похідні (6) і (7) у (5) і після спрощень отримаємо вирази A , B , C , які в даному випадку є сталими:

$$A = 0; \quad B = -R^2 \operatorname{tg} \beta; \quad C = R^2. \quad (8)$$

Підстановкою (8) у (5) знаходимо проєкції орта біномалі \bar{b} :

$$\{0; \quad -\sin \beta; \quad \cos \beta\}. \quad (9)$$

Кут ε між одиничними векторами (3) і (9) знаходимо за відомими формулами:

$$\cos \varepsilon = \sin \beta \sin \alpha; \quad \sin \varepsilon = \sqrt{1 - \sin^2 \beta \sin^2 \alpha}. \quad (10)$$

Виходячи із виразів (10), можна знайти закономірність зміни кута ε у вигляді $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$. На рис. 2 побудовані графіки цієї залежності, причому на рис. 2, а графік побудовано, як арккосинус першого виразу (10), а на рис. 2, б – як арксинус другого виразу.

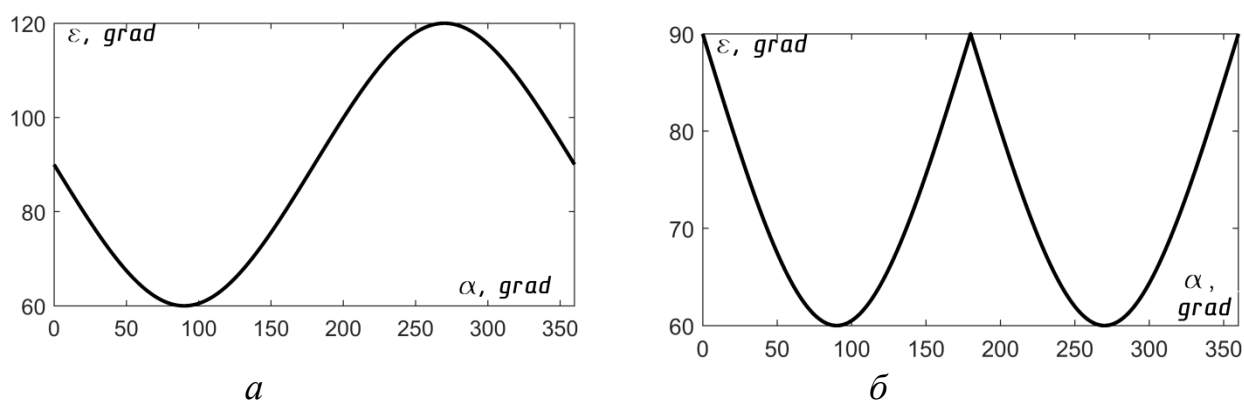


Рис. 2. Графіки залежності $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$ для $\beta = 30^\circ$:
 а) із врахуванням повороту вектору \bar{N} ; б) без врахування повороту вектору \bar{N}

Різний вигляд графіків однієї ж і тієї залежності $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$ пояснюється тим, що в одному випадку враховується тільки абсолютна величина кута (рис. 2, б) без врахування напрямку ортів \bar{N} і \bar{b} , що утворюють кут, а в другому випадку (рис. 2, а) цей напрям враховується. Орт \bar{b} (9) має сталий напрям, а орт \bar{N} (3) – змінний. При $\alpha = 0$ обидва вектори в точці L (рис. 1, в) ці вектори взаємно перпендикулярні ($\varepsilon = 90^\circ$), тому вектор \bar{b} проєкціюється в точку на вектор \bar{N} . У цій же точці і в протилежній (через 180°) відбувається зміна напрямку векторів на протилежний.

Результати досліджень. Якщо за заданою кривою на поверхні можна знайти залежність $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$, тобто закономірність повороту тригранників один відносно одного навколо спільної дотичної при їх русі, то цілком логічно відтворити саму поверхню за кривою і відомою закономірністю $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$. Однак тут не все однозначно. Лінійчату поверхню може утворити множина положень орта \bar{P} тригранника Дарбу, оскільки він розташований у дотичній площині. Порядок утворення поверхні наступний: по заданій кривій рухається тригранник Френе і за заданою закономірністю $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$ відтворюється рух тригранника Дарбу, множина положень орта \bar{P} якого утворює поверхню. Однак у дотичній площині тригранника Дарбу можуть бути розташовані і інші прями, множина яких при русі тригранника утворить лінійчаті поверхні, в тому числі і розгортні (як, наприклад, циліндр на рис. 1, в). Отже, поверхонь, які задовольняють рух тригранника Дарбу по заданій кривій і заданій залежності $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$ може бути багато, і не тільки лінійчатих, а і нелінійчатих теж. Розглянемо приклад.

За задану криву візьмемо еліпс (2) і рівняння поверхні (1), на якій він розташований. Будемо шукати лінійчату поверхню, яку утворює множина положень орта \bar{P} цього тригранника. Положення орта \bar{P} тригранника Дарбу в

нерухомій системі координат будемо шукати, виходячи із решти двох його ортів \bar{T} і \bar{N} , напрям яких можна визначити за відомими рівняннями поверхні і кривої на ній. Напрямок орта \bar{P} визначиться із векторного добутку ортів \bar{T} і \bar{N} . Проекції орта \bar{N} наведені в (3). Проекції орта \bar{T} (напрямні косинуси), який збігається із ортом $\bar{\tau}$, знайдемо за відомими формулами [12]:

$$\begin{aligned}\cos \alpha_{\tau} &= \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = -\frac{\cos \beta \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}}; \\ \cos \beta_{\tau} &= \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{\cos \beta \cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}}; \\ \cos \gamma_{\tau} &= \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}}.\end{aligned}\quad (11)$$

За правилами векторного множення $\bar{N} \times \bar{T}$ і відомими координатами ортів \bar{N} (3) і \bar{T} (11), знаходимо проекції орта \bar{P} на осі нерухомої системи координат:

$$\begin{aligned}l_P &= -\frac{\sin \beta \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}}; \\ m_P &= \frac{\sin \beta \cos^2 \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}}; \\ n_P &= -\frac{\cos \beta}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}}.\end{aligned}\quad (12)$$

Орт \bar{P} , заданий своїми проекціями (12) на осі нерухомої системи координат, має складати кут ε із ортом \bar{n} (рис. 1,в). Щоб перевірити правильність наших розрахунків, знайдемо проекції орта \bar{n} на осі нерухомої системи координат $Oxuz$ за відомими формулами [12]:

$$\begin{aligned}\cos \alpha_n &= \frac{Bz' - Cy'}{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(A^2 + B^2 + C^2)}} = -\frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}}; \\ \cos \beta_n &= \frac{Cx' - Az'}{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(A^2 + B^2 + C^2)}} = -\frac{\cos^2 \beta \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}}; \\ \cos \gamma_n &= \frac{Ay' - Bx'}{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(A^2 + B^2 + C^2)}} = -\frac{\sin \beta \cos \beta \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}},\end{aligned}\quad (13)$$

де вирази для A, B, C наведено в (5), а вирази похідних – у (6).

Неважко перевірити, що кут ε між векторами (12) і (13) описується виразами (10).

Орт \bar{P} (12) визначає напрям прямолінійних твірних лінійчатої поверхні, по якій тригранник Дарбу буде рухатися вздовж напрямної кривої (2). Цей рух буде аналогічний руху тригранника Дарбу по поверхні циліндра (1) вздовж кривої (2) згідно знайденої закономірності $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$ (10). Для побудови цієї поверхні потрібно через кожен точку кривої (2) провести прямолінійну твірну паралельно вектору (12). Відповідно до цього параметричні рівняння лінійчатої поверхні запишуться:

$$\begin{aligned} X &= x + ul_p = R \cos \alpha - u \frac{\sin \beta \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}}; \\ Y &= y + um_p = R \sin \alpha + u \frac{\sin \beta \cos^2 \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}}; \\ Z &= z + un_p = R \operatorname{tg} \beta \sin \alpha - u \frac{\cos \beta}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}}. \end{aligned} \quad (14)$$

На рис. 3 побудовані лінійчаті поверхні за рівняннями (14) при $R=5$, $u=-5 \dots 5$ і різних значеннях кута β .

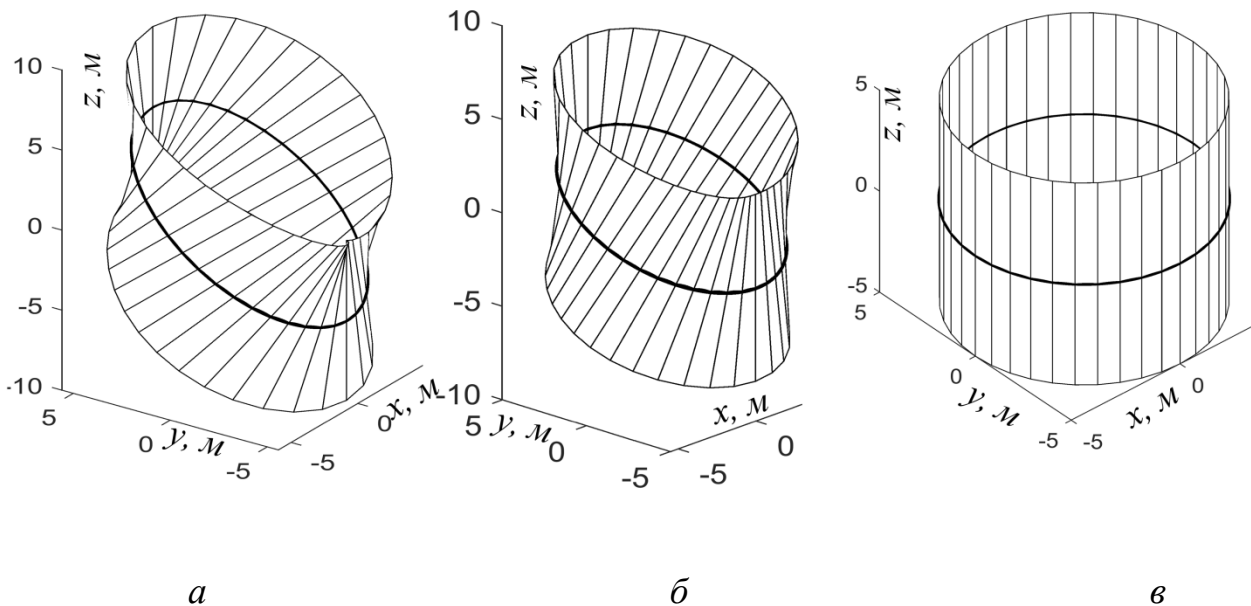


Рис. 3. Лінійчаті поверхні із напрямною кривою у вигляді еліпса, для яких поворот тригранника Дарбу відносно тригранника Френе при їх русі по еліпсу описується виразами (10): а) $\beta=45^\circ$; б) $\beta=30^\circ$; в) $\beta=0$

Для поверхонь, зображених на рис. 3, а, б, рух тригранника Дарбу вздовж еліпса буде таким же, як і для циліндричних поверхонь з вертикальними твірними, що проходять через цей еліпс. При $\beta=0$ еліпс перетворюється у коло (рис. 3, в) і обидва тригранники будуть збігатися.

Обговорення отриманих результатів. На рис. 3 побудовано лінійчаті поверхні, утворені множиною положень орта \bar{P} тригранника Дарбу за знайденою закономірністю зміни кута $\varepsilon=\varepsilon(\alpha)$ (10). У зворотному порядку можна будувати поверхні аналогічного утворення при заданій залежності $\varepsilon=\varepsilon(\alpha)$, зокрема, при $\varepsilon=const$. У такому проекції орта \bar{P} в системі тригранника Френе запишуться:

$$\tau_P = 0; \quad n_P = \cos \varepsilon; \quad b_P = \sin \varepsilon. \quad (15)$$

Перехід від координат вектору \bar{P} в системі тригранника Френе до його координат в нерухомій системі координат здійснюється за відомими формулами [12]:

$$\begin{aligned} x_P &= \tau_P \cos \alpha_\tau + n_P \cos \alpha_n + b_P \cos \alpha_b; \\ y_P &= \tau_P \cos \beta_\tau + n_P \cos \beta_n + b_P \cos \beta_b; \\ z_P &= \tau_P \cos \gamma_\tau + n_P \cos \gamma_n + b_P \cos \gamma_b, \end{aligned} \quad (16)$$

де вирази напрямних косинусів наведено в (4), (11) і (13).

Вектор (13) є одиничним в нерухомій системі координат і напрямним для прямолінійної твірної поверхні, яка збігається із ортом \bar{P} тригранника Дарбу. Знайшовши вирази для (16), запишемо рівняння поверхні згідно формул (14), у яких вирази (12) і (16) відіграють однакову роль:

$$\begin{aligned} X &= x + ux_P = R \cos \alpha - u \frac{\cos \varepsilon \cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}}; \\ Y &= y + uy_P = R \sin \alpha - u \left(\frac{\cos \varepsilon \cos^2 \beta \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}} + \sin \varepsilon \sin \beta \right); \\ Z &= z + uz_P = R \operatorname{tg} \beta \sin \alpha - u \left(\frac{\cos \varepsilon \sin \beta \cos \beta \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}} - \sin \varepsilon \cos \beta \right). \end{aligned} \quad (17)$$

За рівняннями (17) на рис. (4) побудовано поверхні при $R=5$, $\beta=30^\circ$ і різних значеннях кута ε .

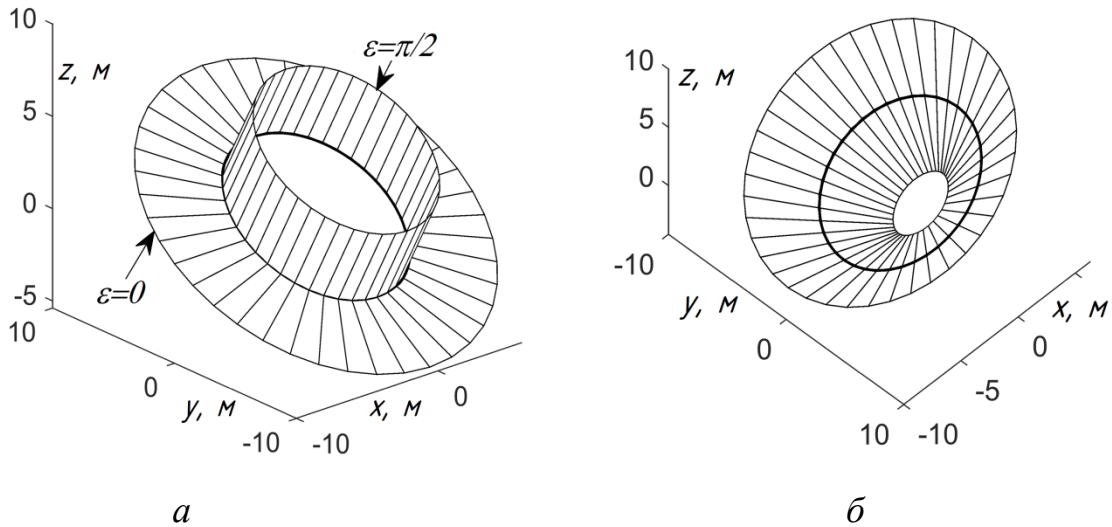


Рис. 4. Лінійчаті поверхні із напрямною кривою у вигляді еліпса і сталим кутом ε між тригранниками Дарбу і Френе:
 а) $\varepsilon=0$ і $\varepsilon=90^\circ$, $u=0\dots 5$; б) $\varepsilon=45^\circ$, $u=-5\dots 5$

При $\varepsilon=const$ утвореними поверхнями для плоскої напрямної кривої є поверхні однакового нахилу твірних. У частковому випадку при $\varepsilon=90^\circ$ поверхнею буде циліндр, для якого напрямна крива є ортогональним перерізом, а при $\varepsilon=0^\circ$ – площина, в якій розташована напрямна крива.

Для випадку, зображеному на рис. 1, в, коли напрямною кривою є еліпс на поверхні вертикального циліндра, нами знайдено залежність $\varepsilon=\varepsilon(\alpha)$ (10). Було сказано, що в зворотному порядку для знайденої залежності (10) і еліпса (2) можна побудувати безліч поверхонь, серед яких має також бути вертикальний циліндр (1), який є розгортною поверхнею. Ця поверхня є обвідною однопараметричної множини площин, які проходять через кожену точку напрямної кривої (в нашому випадку еліпса). Положення площини, яка проходить через задану точку у просторі, задається нормальним вектором цієї площини, тобто вектором \bar{N} у нашому випадку. Вектор \bar{N} відомий і має координати (3). Однак ми цей вектор знайшли за відомою поверхнею циліндра (1). Тепер ми вважаємо цю поверхню невідомою і хочемо її побудувати за знайденим вектором \bar{N} . Знайдемо спочатку проєкції одиничного вектору \bar{N} на орти тригранника Френе. Він розташований в його нормальній площині і проєкціюється тільки на два орти: $n_N=\sin\varepsilon$, $b_N=\cos\varepsilon$. Враховуючи вирази (10), які задають залежність $\varepsilon=\varepsilon(\alpha)$ при русі тригранників по еліпсу на вертикальному циліндрі (рис. 1, в), проєкції вектору \bar{N} на орти тригранника запишуться:

$$\tau_N = 0; \quad n_N = \sqrt{1 - \sin^2 \beta \sin^2 \alpha}; \quad b_N = \sin \beta \sin \alpha. \quad (18)$$

Застосувавши формули (16) для переходу від проєкцій вектору (18) на орти тригранника Френе до проєкцій на осі нерухомої системи координат $Oxyz$, отримуємо результат, який точно збігається із (3). За цим вектором можна побудувати тільки одну розгортну поверхню, як обвідну однопараметричної множини площин, якою буде вертикальний циліндр.

Висновки та перспективи.

При русі тригранників Френе і Дарбу по напрямній плоскій або просторовій кривій на поверхні існує аналітичний зв'язок, який описує взаємне положення тригранників один відносно одного. За цим аналітичним описом у зворотному порядку за цією ж напрямною кривою можна побудувати безліч поверхонь, в тому числі і вихідну, які задають один і той же рух тригранників при їх переміщенні по кривій. Серед цієї множини поверхонь є одна розгортна, яка утворюється як обвідна однопараметричної множини площин, перпендикулярних до орта \bar{n} тригранника Дарбу.

Література

1. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960. 292 с.
2. Pylypaka S., Volina T., Nesvidomin V., Pavlov A., Dranovska S. The possibility to apply the Frenet trihedron and formulas for the complex movement of a point on a plane with the *predefined plane displacement*. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2021, 3 (7-111), pp. 45–50. URL: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/232446/234604>.
3. Ванін В.В., Вірченко Г.А., Яблонський Г.А. До питання геометричного моделювання з використанням кривих Безьє. *Прикладна геометрія, інженерна графіка*. Вип. 98. К., 2020. С. 29 – 34.
3. Чепіжний А. В. Тригранник Френе. Вісник Сумського національного аграрного університету. Сер. : *Механізація та автоматизація виробничих процесів*. 2013. Вип. 10. С. 170-174. Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vsna_mekh_2013_10_40
4. Кресан Т.А. Рух частинки ґрунту по поверхні розгорнутого гелікоїда з горизонтальною віссю обертання і заданим кутом атаки. *Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research*. Kyiv. Ukraine. 2021. Vol. 12, No 2. P. 67 - 75.
5. Воліна Т.М. Дослідження руху частинки по шорсткій поверхні, яка утворена гвинтовим рухом синусоїди, під дією сили власної ваги. *Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research*. Kyiv. Ukraine. 2020. Vol. 11, No. 3. P. 187-194.

6. Борисенко В. Д., Устенко С. А., Устенко І. В. Геометричне моделювання кривих ліній і поверхонь у натуральній параметризації: монографія. Миколаїв: МНУ, 2018. 216 с.
7. Захарова Т.М., Кремець Т.С. Плоскі криві у функції натурального параметра на основі годографа Піфагора. *Сучасні проблеми геометричного моделювання*. Мелітополь, 2017. № 8. С. 65–70.
8. Холодняк Ю.В., Гавриленко Є.А., Івженко О.В., Найдиш А.В. Технологія моделювання поверхонь складних технічних виробів за заданими умовами. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. Мелітополь: ТДАТУ імені Дмитра Моторного, 2019. Вип. 19, т. 2. С. 257-263.
9. Кресан Т.А. Конструювання центроїд некруглих коліс на основі деформації еліпса. *Прикладна геометрія, інженерна графіка*. Київ : КНУБА 2021. Вип. 100. С. 182–194.
10. Гавриленко Є.А., Холодняк Ю. В., Найдиш А. В. Моделювання одновимірних обводів із забезпеченням заданої точності інтерполяції. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2018. № 3(2). С. 125-129. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vkhdtu_2018_3%282%29__22
11. Петрова А.Т. Деякі геометричні основи конструювання кривих поверхонь в архітектурі. *Таврійський науковий вісник*. Серія: Технічні науки. 2021. № 1. С. 53 – 56.
12. Милінский В.И. Дифференциальная геометрия. Л.: КУБУЧ, 1934. 332 с.

References

1. Savelov, A.A. (1960). Flat curves. Taxonomy, properties, applications. Moscow: FIZMATGIZ, 292. {in Russian}
2. Pylypaka, S., Volina, T., Nesvidomin, V., Pavlov, A., Dranovska, S. (2021). The possibility to apply the Frenet trihedron and formulas for the complex movement of a point on a plane with the predefined plane displacement. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, N. 3 (7-111), 45–50. Available at: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/232446/234604>. {in Ukrainian}
3. Vanin, V.V., Virchenko, G.A., Yablonsky, G.A. (2020). On the issue of geometric modeling using Bezier curves. *Applied geometry, engineering graphics*. Kyiv : KNUCA. Vol. 98. 29 – 34. {in Ukrainian}
4. Kresan, T.A. (2021). The movement of a soil particle on the surface of an unfolded helicoid with a horizontal axis of rotation and a given angle of attack. *Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research*. Vol. 12 (2), 67 - 75. {in English}

5. Volina, T.M. (2020). The study of the movement of a particle on a rough surface formed by the helical motion of a sinusoid under the action of its own weight. *Machinery & Energetics*. Vol. 11 (3). Pp.187-194. {in English}
6. Borisenko, V.D., Ustenko, S.A., Ustenko, I.V. (2018). Geometric modeling of curved lines and surfaces in natural parameterization: monograph. Mykolaiv: MNU, 216. {in Ukrainian}
7. Zakharova, T.M., Kremets, T.S. (2017). Plane curves in the function of a natural parameter based on the Pythagorean hodograph. *Modern problems of geometric modeling*. Vol. 8. Pp. 65 –70. {in Ukrainian}
8. Kholodnyak, Yu.V., Gavrilenko, E.A., Ivzhenko, O.V., Naydysh, A.V. (2019). Technology of modeling surfaces of complex technical products under given conditions. *Proceedings of the Tavria State Agrotechnological University*. Melitopol : Dmytro Motorny State Agricultural University. Vol. 19 (2). Pp. 257-263. {in Ukrainian}
9. Kresan, T.A. (2021). Designing centroids of non-circular wheels based on ellipse deformation. *Applied geometry, engineering graphics*. Vol 100. Pp. 182 – 194. {in Ukrainian}
10. Gavrilenko, E.A., Kholodnyak, Yu. V., Naydysh, A. V. (2018). Modeling one-dimensional contours with a given interpolation accuracy. *Bulletin of the Kherson National Technical University*. Vol. 3(2). PP. 125-129. Available at: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vkhdtu_2018_3%282%29__22 {in Ukrainian}
11. Petrova, A. T. (2021). Some geometric foundations of designing curved surfaces in architecture. *Tavria Scientific Bulletin. Series: Technical Science*. Vol. 1. Pp. 53 – 56.
12. Milinsky, V.I. (1934). *Differential Geometry*. Leningrad: KUBUCH, 332 p.

PhD, assistant professor **Andrii Nesvidomin**¹,
a.nesvidomin@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1495-1718
National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

ANALYTICAL RELATION BETWEEN THE FRENET TRIHEDRON OF A DIRECT CURVE AND THE DARBOUX TRIHEDRON OF THE SAME CURVE ON A SURFACE

The Frenet trihedron plays an extremely important role in the theory of differential geometry. It concerns curved lines, which we will call direction lines. At the current point of the direction curve, three mutually perpendicular unit orthogonals of this trihedron can be uniquely constructed. The tangent ort $\bar{\tau}$ is

directed along the tangent to the curve at the current point. The ort of main normal \bar{n} is located in the plane formed by three points of the curve on different sides of the current one when they approach the current point as close as possible. It is directed towards the center of curvature of the curve. The ort of binormal \bar{b} is perpendicular to two orts $\bar{\tau}$ and \bar{n} and has a direction according to the rule of the right-hand coordinate system. Thus, the motion of the Frenet trihedron along the direction curve, as a rigid body, will be definite. It can be described in a fixed coordinate system through nine direction cosines or through three Euler angles in a spherical coordinate system, which are determined through direction cosines. The direction cosines themselves are determined through the first and second derivatives of the equations of the direction curve.

The Darboux trihedron is also a right coordinate system that moves along the direction curve lying on the surface. Its tangential ort \bar{T} is also directed along the tangent to the curve at the current point, and the other orts pairwise form a certain angle ε with the Frenet trihedron orts. This is due to the fact that one of the orts of the Darboux trihedron is normal \bar{N} to the surface and forms a certain angle ε with the binormal. Accordingly, the third ort \bar{P} of the Darboux trihedron forms an angle ε with ort \bar{n} of the Frenet trihedron. The orts \bar{T} and \bar{P} of the Darboux trihedron form a tangent plane to the surface at the current point of the curve, and the corresponding orts $\bar{\tau}$ and \bar{n} of the Frenet trihedron form a tangent plane to the curve at the same point. Thus, when the Frenet and Darboux trihedra move along a curve with aligned vertices, they rotate around a common orthogonal ort $\bar{\tau} \equiv \bar{T}$ by an angle ε between the tangent plane of the Frenet trihedra and the tangent plane to the surface of the Darboux trihedra. In a special case (for example, for a plane curve), these trihedra coincide, i.e. $\varepsilon=0$.

The article considers the analytical relation between the Frenet and Darboux trihedra, i.e. finding an expression for the angle ε . The inverse problem is considered - determining the motion of the Darboux trihedra for a given pattern of change in the angle ε . A special case is considered and it is shown that for a plane directed curve at $\varepsilon=\text{const}$ the set of ort \bar{N} positions forms a developed surface of the same slope of the generators. In particular, at $\varepsilon=90^\circ$ such a surface will be a cylinder for which the flat directed curve is an ort section, and for $\varepsilon=0^\circ$ – the plane in which the directed curve is located.

Keywords: orts; direction cosines; Euler angles; surface; contact plane; tangent plane.