

д. т. н. професор **Усенко В.Г.**,  
valery\_usenko@ukr.net, ORCID: 0000-0002-4937-6442  
к. т. н. доцент **Воронцов О.В.**,  
vorontsov@pntu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-7339-9196  
к. т. н. доцент **Усенко І.С.**  
irina\_\_usenko@ukr.net, ORCID: 0000-0002-6217-4423

Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія  
Кондратюка»

## **РЕКУРСИВНІ ПІДХОДИ ДО ОЦІНКИ НАДІЙНОСТІ КІЛЬЦЕВИХ СТРУКТУР**

*Проблема оцінювання надійності кільцевих структур є актуальною для багатьох інженерних систем, таких як водопровідні, газові, телекомунікаційні та енергетичні мережі. Стаття присвячена аналізу топологічних характеристик кільцевих мереж, їх впливу на стійкість до відмов, а також розробці математичних моделей для оцінки надійності. Основна увага приділена однокільцевим структурам із врахуванням однакової та різної надійності елементів.*

*На основі теорії графів і покривних дерев запропоновано формули, що дозволяють враховувати всі можливі комбінації працездатності ділянок, а також внесок резервних шляхів. Окрему увагу приділено побудові рекурсивних моделей, які значно спрощують чисельні розрахунки та дають можливість моделювати великі системи з великою кількістю елементів. Табличне подання станів мережі демонструє всі можливі конфігурації працездатності, що сприяє точному прогнозуванню поведінки мереж за умов часткових відмов.*

*Практичне значення дослідження полягає у створенні універсальних інструментів для проектування інженерних мереж, оптимізації витрат, зниження ризику аварій і підвищення стійкості систем. Запропоновані моделі можуть бути застосовані до локальних мереж, систем із резервними лініями, а також телекомунікаційних структур. Важливим напрямком подальших досліджень є розробка динамічних моделей, які враховуватимуть зміну параметрів надійності в часі. Викладені результати створюють основу для підвищення ефективності функціонування реальних систем у різних галузях промисловості.*

*Ключові слова: надійність кільцевих мереж, резервування в мережах, теорія графів, кільцеві топології, моделі оцінки надійності.*

**Постановка проблеми.** Проблема оцінювання надійності має вагоме значення як у наукових дослідженнях, так і в практичній діяльності, оскільки безпосередньо впливає на ефективність, стійкість і безпечність функціонування сучасних інженерних мереж [3], [9]. Ця задача є критичною для проектування водопровідних і газових систем, які забезпечують базові потреби життєдіяльності, а також для мереж операторів стільникового зв'язку, що є основою комунікаційної інфраструктури в умовах цифровізації суспільства. Питання надійності актуальне для створення складних технічних систем, таких як транспортні магістралі, енергетичні мережі, системи теплопостачання та інші інфраструктурні об'єкти. Надійне функціонування цих систем є не лише показником їхньої якості, а й фактором забезпечення безперервності процесів у різних галузях економіки, соціальної стабільності та безпеки населення. Таким чином, оцінювання надійності виступає фундаментальною складовою процесу проектування, яка поєднує інженерні рішення з прогнозуванням ризиків, оптимізацією витрат і мінімізацією ймовірності виникнення аварійних ситуацій [1], [4], [13], [14].

**Цілі статті.** Розробка інструментів для ефективного моделювання надійності систем із різними параметрами з використанням аналітичного підходу, побудови моделей через рекурсивне представлення.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Аналіз останніх досліджень показує, що значна увага приділяється питанням оцінювання надійності структур інженерних мереж, особливо у випадках, коли окремі елементи системи характеризуються однаковими параметрами надійності. Зокрема, у роботі [1] проведено детальне дослідження таких мереж, яке включало аналіз їхньої стійкості, залежності функціональних характеристик від кількості елементів та їх взаємозв'язку. Результати цього аналізу є важливими для вивчення поведінки систем за відмов окремих компонентів, що дозволяє більш точно моделювати й прогнозувати їх функціонування [5], [7], [8], [9]. Такий підхід є особливо корисним для оптимізації інженерних рішень і забезпечення ефективності роботи мереж навіть у найскладніших умовах [6], [10], [11], [12]. Розроблена методологія використовує графічні моделі для оцінки надійності технічних систем. Теорію графів адаптовано для моделювання структури систем, де вузли відповідають окремим компонентам, а дуги – зв'язкам між ними. Моделі, запропоновані в роботі, орієнтовані переважно на статичну оцінку надійності. Динамічні зміни у структурі систем або середовищі функціонування розглянуто частково. У статті [9] представлено топології, які називаються мережами хордового кільця та k-куба та ретельно аналізуються з точки зору надійності.

**Основна частина.** Форма структури мережі є одним із ключових факторів, які впливають на її надійність. Топологічні характеристики, зокрема зв'язність структури, визначають здатність мережі забезпечувати свою функціональність за умов відмов окремих компонентів. Зв'язність

виявляє рівень взаємозв'язку вузлів у випадку пошкодження чи відключення певних її елементів.

Для оцінювання надійності структури мережі використаємо такі основні поняття: працездатний, непрацездатний та граничний працездатний стани. У працездатному стані мережі всі вузли залишаються поєднаними між собою, забезпечуючи передачу інформації, енергії чи ресурсів без порушення функціональності. У цьому стані будь-який вузол або елемент може бути досягнутий з іншого через відповідні зв'язки.

Непрацездатний стан виникає, коли хоча б один вузол структури виявляється ізольованим. У такому стані мережа втрачає свою цілісність, а функціональність значно знижується через відсутність можливості передачі між відокремленими частинами. Граничний працездатний стан визначається як стан, у якому всі вузли залишаються поєднаними, проте з'єднання обмежені мінімальною кількістю ділянок, які формують покривне дерево. Покривне дерево – це зв'язна підструктура графа, яка включає всі вузли, але має мінімальну кількість зв'язків, тобто не містить циклів. Цей стан демонструє найнижчу рівновагу між економією ресурсів (мінімізацією кількості зв'язків) та забезпеченням функціональної зв'язності.

Для практичного застосування аналіз цих станів дозволяє оцінювати ступінь стійкості мережі до пошкоджень, оптимізувати її проектування та прогнозувати потенційні відмови. Зокрема, покривне дерево може бути використане як основа для проектування мереж із мінімально необхідною кількістю зв'язків, що знижує витрати на побудову й обслуговування, одночасно забезпечуючи мінімально необхідну працездатність.

Надійність структури мережі являє імовірності суми сумісних подій [2]:

$$R = \sum_{k=1}^T (-1)^{k+1} \binom{T}{k} P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k), \quad (1)$$

де:  $\binom{T}{k}$  – кількість способів вибору  $k$  дерев із загальної кількості  $T$ ;

$P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k)$  – ймовірність одночасного існування  $k$ -ти дерев.

Це рівняння базується на формулі включень-винятків, яка дозволяє обчислювати ймовірність об'єднання декількох подій. У контексті структурної мережі ці події стосуються існування різних конфігурацій зв'язності (покривних дерев), які забезпечують функціонування мережі. Формула враховує всі можливі комбінації перекриттів між деревами, додаючи або віднімаючи їхні внески в загальну ймовірність.

Візьмемо елементарну структуру яка має такі числові характеристики: число вузлів  $t=3$ , число ділянок  $p=3$ , число кілець  $n=1$ . Число всіх можливих станів цієї структури обчислюється за формулою

$V=2^p=2^3=8$  (табл. 1). Із них 4 стани є працездатними так як мережа залишається зв'язною навіть за певних відмов, завдяки кільцю і 4 непрацездатними бо хоча б один вузол відокремлюється через критичну кількість відмов. Це логічно відповідає топології кільцевої структури, де зв'язність зберігається доти, доки щонайменше 2 ділянки залишаються функціональними. Кожна з  $p=3$  ділянок може бути в одному з двох станів: працездатному (1) або непрацездатному (0). Табличне подання станів наочно показати всі можливі комбінації працездатності або відмов ділянок у структурі. Кожен стан впливає на загальну надійність структури. Формула надійності враховує два ключові типи станів: працездатний стан всієї структури, коли всі ділянки працюють та стан часткової працездатності якщо одна або кілька ділянок відмовляють, але структура залишається зв'язною.

Таблиця 1

Стани працездатності кільцевої структури та їх внесок у загальну надійність

№	Ділянки			Зв'язність структури	Ймовірність стану
	$r_1$	$r_2$	$r_3$		
1	1	1	1	Так	$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$
2	1	1	0	Так	$r_1 \cdot r_2 \cdot (1-r_3)$
3	1	0	1	Так	$r_1 \cdot (1-r_2) \cdot r_3$
4	1	0	0	Ні	$r_1 \cdot (1-r_2) \cdot (1-r_3)$
5	0	1	1	Так	$(1-r_1) \cdot r_2 \cdot r_3$
6	0	1	0	Ні	$(1-r_1) \cdot r_2 \cdot (1-r_3)$
7	0	0	1	Ні	$(1-r_1) \cdot (1-r_2) \cdot r_3$
8	0	0	0	Ні	$(1-r_1) \cdot (1-r_2) \cdot (1-r_3)$

Для структури з одним кільцем рівняння надійності можна представити у формі:

$$R = a_1 r^p + T r^{p-n} \quad (2)$$

де  $R$  – загальна надійність мережі;  $a_1$  – коефіцієнт, що враховує внесок ділянок у загальну зв'язність;  $r$  – надійність однієї ділянки (ймовірність її безвідмовної роботи);  $p=3$  – загальна кількість ділянок у структурі;  $n=1$  – кількість циклів (одне кільце);  $T$  – кількість покривних дерев у структурі.

Вираз поділяє внесок у надійність на два компоненти:  $a_1 r^p$  – враховує всі випадки, коли кожна з  $p=3$  ділянок функціонує незалежно та

відображає основну надійність системи за умови, що всі ділянки є працездатними;  $Tr^{p-n}$  – враховує випадки, коли мережа залишається зв'язною завдяки резервній структурі у вигляді циклу. Через наявність  $n=1$  циклу мережа має додаткову стійкість, навіть якщо одна з ділянок відмовляє. Ця компонента відображає внесок додаткового зв'язного покривного дерева, яке забезпечує працездатність мережі навіть за часткових відмов. Вираз  $a_1r^p$  відповідає внеску стану, коли всі ділянки працюють і ймовірність цього стану  $r^p$ .

Член  $Tr^{p-n}$  враховує додаткову стійкість мережі завдяки наявності циклу. При цьому  $T$  – це кількість покривних дерев, які можна утворити, видаляючи одну ділянку з кільця. Для заданої структури (3 вузли, 3 ділянки, 1 кільце) кількість покривних дерев  $T=3$ . Кожне дерево утворюється вилученням однієї ділянки з циклу. Значення коефіцієнта  $a_1$  залежить від комбінації зв'язків у структурі та визначається топологією. Підставивши значення, рівняння стає:

$$R=a_1r^3+3r^2. \quad (3)$$

Якщо  $r=1$  (ідеальна надійність кожної ділянки), тоді  $R=1$ , що відповідає повній працездатності мережі. Якщо  $r=0$  (жодна ділянка не працює), тоді  $R=0$ , що відповідає повній непрацездатності мережі. Покривні дерева утворюються шляхом видалення однієї з трьох ділянок і кожне покривне дерево забезпечує зв'язність. Це відповідає описаному значенню  $T^{p-n}$ , яке відображає стійкість мережі за рахунок резервної топології.

Загальна формула надійності однокільцевої структури у поліноміальному поданні:

$$R = -p \prod_{i=1}^p r_i + \sum_{j \neq i}^{p-1} r_i \quad (4)$$

Вираз враховує зменшення надійності через зростання кількості ділянок  $p$ , адже  $r^p$  зменшується експоненційно зі збільшенням  $p$ .

Формула враховує резервування у структурі через цикли, що підвищує надійність. Це дозволяє оцінювати переваги використання резервних шляхів для зв'язності мережі. У практичному застосуванні модель використовується для проектування локальних мереж (LAN), водопровідних систем із резервними лініями, а також телекомунікаційних мереж, де кільця забезпечують стабільність у разі пошкодження. Вона дозволяє чітко розділити внесок основних та резервних зв'язків у працездатність структури та є зручною для аналізу простих топологій, таких як кільцеві мережі, і може бути розширена для складніших конфігурацій.

Рекурсивна форма зручна для побудови програмного забезпечення. Вибір представлення залежить від завдання. Значення надійності ділянок задаються як вхідні параметри для кожної окремої ділянки і кожен крок рекурсії враховує внесок цієї ділянки в загальну надійність. Рекурсивна формула для кільцевої структури з  $p$  ділянок задається:

$$R(p)=R(p-1)+r_p \cdot R(p-2), \quad (5)$$

де  $r_p$  – надійність  $p$ -ї ділянки;  $R(p-1)$  – надійність підграфа структури без  $p$ -ї ділянки;  $R(p-2)$  – надійність підграфа структури без останніх двох ділянок, що враховує випадки резервування. Враховуються всі можливі конфігурації працездатності в кільцевій структурі, включно з резервними станами.

Для початку рекурсії потрібно задати базові умови для малих значень  $p$ : для структури з однією ділянкою ( $p=1$ ):  $R(1)=r_1$ , де  $r_1$  – надійність першої ділянки; для структури з двома ділянками ( $p=2$ )  $R(2)=r_1 \cdot r_2$ .

Для кільцевої структури з трьома ділянками задаємо базові умови:  $R(1)=r_1$ ,  $R(2)=r_1 \cdot r_2$  та використовуємо рекурсивну формулу:

$$R(3)=R(2)+r_3 \cdot R(1). \quad (6)$$

Підставляємо значення:

$$R(3)=r_1 \cdot r_2 + r_3 \cdot r_1. \quad (7)$$

Це відповідає врахуванню всіх працездатних станів для структури з трьома ділянками.

Розглянемо розширення для  $p=4$ . Для структури з чотирма ділянками  $(r_1, r_2, r_3, r_4)$  такі базові умови:  $R(1)=r_1$ ,  $R(2)=r_1 \cdot r_2$ . Перейдемо до рекурсивних обчислень для  $R(3)$ :

$$R(3)=R(2)+r_3 \cdot R(1), \text{ тобто: } R(3)=r_1 \cdot r_2 + r_3 \cdot r_1. \quad (8)$$

Для  $R(4)$ :

$$R(4)=R(3)+r_4 \cdot R(2), \quad (9)$$

підставляємо  $R(3)$  та  $R(2)$ :

$$R(4)=(r_1 \cdot r_2 + r_3 \cdot r_1) + r_4 \cdot (r_1 \cdot r_2). \quad (10)$$

Відповідний алгоритм для довільної кількості ділянок  $p$  складається з трьох кроків:

1. Задаємо базові значення  $R(1)$  та  $R(2)$  та уводимо значення  $r_i$  для кожної ділянки  $i \in [1, p]$ .
2. Для кожного наступного  $R(k)$ , де  $k \in [3, p]$ :  $R(k) = R(k-1) + r_k \cdot R(k-2)$ .
3. Значення  $R(p)$  дає надійність структури.

Переваги рекурсивного підходу в гнучкості та модульності. Кожен рівень рекурсії відповідає структурі меншої складності. Цей метод корисний для чисельного моделювання більш складних структур, які мають більше кілець. Формула враховує лише наявність одного циклу ( $n=1$ ). Для мереж із кількома циклами або складнішою структурою потрібно додаткове узагальнення.

**Висновки та перспективи досліджень.** Топологія структури, зокрема наявність кілець і резервних зв'язків, суттєво впливає на загальну надійність системи. Кільцеві структури забезпечують додаткову стійкість до відмов завдяки резервним шляхам.

Розроблено формули для оцінювання надійності однокільцевих структур із врахуванням однакової та різної надійності елементів. Використання рекурсії дозволяє побудувати ітеративні алгоритми для автоматизації розрахунків у складних мережах.

Гнучкість моделей для різних умов забезпечується адаптивністю до систем із однаковою чи різною надійністю елементів. Для систем із різною надійністю елементів ефективно використовується комбінація добутоків і сум часткових станів.

Розроблені моделі та методи дозволяють точно оцінювати надійність кільцевих структур у різних умовах, враховуючи топологічні особливості та індивідуальні параметри елементів.

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на розробку моделей, що враховують змінність параметрів надійності з часом, або інтеграцію методів для прогнозування потенційних відмов системи.

## Література

1. Ali, M., Macana, C.A., Prakash, K., Islam, R., Colak, I., Pota, H.: Generating open-source datasets for power distribution network using openstreetmaps. In: 2020 9th International Conference on Renewable Energy Research and Application (ICRERA), pp. 301–308 2020. <https://doi.org/10.1109/ICRERA49962.2020.9242771>
2. Райнике К., Ушаков И.А. Оценка надежности систем с использованием графов. М.: Радио и связь, 1988. 209 с.
3. Vijnowski, S., et al. (2011). Automatic meter reading via wireless network with topology control based on chordal rings. *Rynek Energii*, 3, 147–152.
4. Новохатний В.Г. Зв'язок показників надійності кільцевих структур.

Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Технічні науки: зб. наук. пр. Рівне: НУВГП, 2013. Вип. 3. С. 142-148.

5. Canale, E., Rela, G., Robledo, F., Romero, P., St'abile, L.: Design of most-reliable cubic networks by augmentations. In: 2020 16th International Conference on the Design of Reliable Communication Networks DRCN 2020, pp. 1–6 (2020). <https://doi.org/10.1109/DRCN48652.2020.1570611164>
6. Chen, Y., Shen, H., & Zhang, H. (2011). Routing and wavelength assignment for hypercube communications embedded on optical chordal ring networks of degrees 3 and 4. *Computer Communications*, 34(7), 875–882.
7. Giorgetti A. *IEEE Transactions on Reliability* (2017). Vol. 66, Issue: 4, 1238-1252
8. Lai, C.-N. (2012). Optimal construction of all shortest node-disjoint paths in hypercubes with applications. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 23(6), 1129–1134.
9. Jahanshahi M., Bistouni F. Reliable networking in Ethernet ring mesh networks using regular topologies. *Telecommunication Systems*, (2019). Vol. 72, 199-220
10. Ram M., Tyagi S., Kumar A., Goyal N. Analysis of signature reliability of ring-shaped network system. *International Journal of Quality & Reliability Management*, 2021. <https://doi.org/10.1108/IJQRM-05-2020-0155>
11. Rajkumar, S., & Goyal, N. K. (2016). Reliable multistage interconnection network design. *Peer-to-Peer Networking and Applications*, 9(6), 979–990.
12. Brand R., Cohen R., Barzel B., Haber S. Constructing cost-effective infrastructure networks. arXiv preprint arXiv:2308.11033, 2023. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.11033>
13. Storm J., Kager W., Mandjes M., Borst S. Stability of a Stochastic Ring Network. arXiv preprint arXiv:2206.07006, 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.11033>
14. Zhang, J., et al. (2015). Dynamic wavelength assignment for realizing hypercube-based Bitonic sorting on wavelength division multiplexing linear arrays. *International Journal of Computer Mathematics*, 92(2), 218–229.

## References

1. Ali, M., Macana, C.A., Prakash, K., Islam, R., Colak, I., Pota, H.: Generating open-source datasets for power distribution network using openstreetmaps. In: 2020 9th International Conference on Renewable Energy Research and Application (ICRERA), pp. 301–308 2020. <https://doi.org/10.1109/ICRERA49962.2020.9242771>
2. Reinschke K., Ushakov I.A. Evaluation of system reliability using graphs. M.: Radio and Communications, 1988. 209 p.
3. Bujnowski, S., et al. (2011). Automatic meter reading via wireless network



- with topology control based on chordal rings. *Rynek Energii*, 3, 147–152.
4. *Novokhatniy V.G.* Connections showing the reliability of ring structures. Newsletter of the National University of Water Governance and Nature Management. Technical sciences: collection. – Rivne: NUVGP, 2013. Vip. 3. pp. 142-148.
  5. *Canale, E., Rela, G., Robledo, F., Romero, P., St'abile, L.:* Design of most-reliable cubic networks by augmentations. In: 2020 16th International Conference on the Design of Reliable Communication Networks DRCN 2020, pp. 1–6 (2020). <https://doi.org/10.1109/DRCN48652.2020.1570611164>
  6. *Chen, Y., Shen, H., & Zhang, H.* (2011). Routing and wavelength assignment for hypercube communications embedded on optical chordal ring networks of degrees 3 and 4. *Computer Communications*, 34(7), 875–882.
  7. *Giorgetti A.* *IEEE Transactions on Reliability* (2017). Vol. 66, Issue: 4, 1238-1252
  8. *Lai, C.-N.* (2012). Optimal construction of all shortest node-disjoint paths in hypercubes with applications. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 23(6), 1129–1134.
  9. *Jahanshahi M., Bistouni F.* Reliable networking in Ethernet ring mesh networks using regular topologies // *Telecommunication Systems*, (2019). Vol. 72, 199-220
  10. *Ram M., Tyagi S., Kumar A., Goyal N.* Analysis of signature reliability of ring-shaped network system. *International Journal of Quality & Reliability Management*, 2021. <https://doi.org/10.1108/IJQRM-05-2020-0155>
  11. *Rajkumar, S., & Goyal, N. K.* (2016). Reliable multistage interconnection network design. *Peer-to-Peer Networking and Applications*, 9(6), 979–990.
  12. *Brand R., Cohen R., Barzel B., Haber S.* Constructing cost-effective infrastructure networks. arXiv preprint arXiv:2308.11033, 2023. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.11033>
  13. *Storm J., Kager W., Mandjes M., Borst S.* Stability of a Stochastic Ring Network. arXiv preprint arXiv:2206.07006, 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.11033>
  14. *Zhang, J., et al.* (2015). Dynamic wavelength assignment for realizing hypercube-based Bitonic sorting on wavelength division multiplexing linear arrays. *International Journal of Computer Mathematics*, 92(2), 218–229.

D.Sc., prof **Usenko Valerii**,  
valery\_usenko@ukr.net, ORCID: 0000-0002-4937-6442  
Ph.D., assoc. prof **Vorontsov Oleg**,  
vorontsov@pntu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-7339-9196  
Ph.D., assoc. prof **Usenko Irina**  
irina\_\_usenko@ukr.net, ORCID: 0000-0002-6217-4423

National University "Yuri Kondratyuk Poltava Polytechnic"

## **RECURSIVE APPROACHES TO RELIABILITY ASSESSMENT OF RING STRUCTURES**

*Abstract. The problem of assessing the reliability of ring structures is highly relevant for many engineering systems, such as water supply, gas, telecommunication, and energy networks. This article is devoted to the analysis of the topological characteristics of ring networks, their impact on failure resilience, and the development of mathematical models for reliability assessment. Particular attention is paid to single-ring structures, considering both uniform and varying reliability of elements.*

*Based on graph theory and spanning trees, formulas are proposed that take into account all possible combinations of element functionality and the contribution of redundant paths. Special focus is given to the development of recursive models, which significantly simplify numerical calculations and enable the modeling of large systems with numerous elements. The tabular representation of network states demonstrates all possible functionality configurations, facilitating accurate prediction of network behavior under partial failures.*

*The practical significance of this study lies in the creation of universal tools for engineering network design, cost optimization, risk reduction, and enhanced system resilience. The proposed models can be applied to local networks, systems with redundant lines, and telecommunication structures. An important direction for future research is the development of dynamic models that consider changes in reliability parameters over time. The results presented lay the foundation for improving the operational efficiency of real-world systems in various industrial sectors.*

*Keywords: ring network reliability; network redundancy; graph theory; ring topologies; reliability assessment models.*