УДК 514.7
DOI: 10.32347/0131-579x.2025.108.18-31
к.ф.-м.н., доцент **Бондаренко Н.В.**
bondarenko.nv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-6078-9467
Київський національний університет будівництва і архітектури
к.ф.-м.н., доцент **Отрашевська В.В.**
otrashevska.vv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9879-1442
Київський національний університет будівництва і архітектури

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВИХ КРИВИХ ГОДОГРАФА-ПІФАГОРА ІЗ ЗАДАНОЮ ФОРМОЮ

У роботі розглядається метод побудови просторових поліноміальних кривих годографа Піфагора (PH криві) за заданим багатокутником Гаусса-Радау. PH криві мають важливі застосування у комп'ютерній графіці, геометричному моделюванні, керуванні рухом матеріальної точки, а також у задачах інтерполяції та апроксимації. Оскільки функція швидкості зміни довжини дуги PH кривої відносно параметра кривої є поліноміальною, то це дає можливість точно обчислювати довжину дуги будь-якого сегмента кривої та виконувати раціональні зміщення кривої, не використовуючи чисельні методи. Довільна поліноміальна PH крива може бути представлена як крива Безьє. Однак багатокутник Безьє не підходить для керування формою PH кривих, оскільки незначна зміна багатокутника призводить до втрати властивості PH. У роботі розглядається багатокутник Гаусса-Радау, вершини якого отримані обчисленням похідних у вузлах квадратури Гаусса-Радау. Застосування цього багатокутника дозволяє керувати формою кривої, не втрачаючи властивості PH. Багатокутник Гаусса-Радау природно визначає початковий дотичний вектор PH кривої, оскільки початкова точка квадратури Гаусса-Радау є наперед визначеним вузлом, а також має властивість інтерполяції кінцевих точок. Для опису просторових PH кривих використовується кватерніонне представлення, яке дозволяє ефективно моделювати криві, контролювати їхню форму, орієнтацію в просторі. Показано, що існує нескінченна кількість поліноміальних просторових PH кривих степеня $2n+1$*, які залежать від* n *довільних параметрів, з одним і тим же багатокутником Гаусса-Радау з* n *ребрами. Наведено метод побудови таких кривих та застосовано його до побудови кубічних просторових кривих за заданим багатокутником Гаусса-Радау.*

Ключові слова: криві годографа Піфагора; кватерніонне представлення; квадратура Гаусса-Радау; багатокутник Гаусса-Радау, інтерполяція.

Постановка проблеми. Просторові криві годографа Піфагора (PH криві) вперше розглядалися Farouki et.al. [1] та Dietz et al. [2], які незалежно один від одного встановили умови, за яких просторові криві мають поліноміальну функцію швидкості. Функція швидкості поліноміальної PH кривої, яка визначає швидкість зміни довжини дуги відносно параметра кривої, є поліномом, а не квадратним коренем полінома. Ця властивість надає поліноміальним PH кривим багато обчислювальних переваг в комп'ютерному геометричному моделюванні, керуванні рухом матеріальної точки, анімації, плануванні шляхів, робототехніці та ін. Завдяки поліноміальній формі функції швидкості можливо точно визначати довжину дуги будь-якого сегмента кривої, виконувати раціональні зміщення кривої та визначати раціональні одиничні дотичні вектори. PH криві є важливим інструментом для побудови ефективних алгоритмів інтерполяції та апроксимації загальних кривих. Інтерполятори для загальних кривих зазвичай обчислюються з використанням розкладів у ряд Тейлора, що призводить до похибок через відсікання членів ряду вищих порядків. Ця проблема вирішується використанням поліноміальних PH кривих для опису траєкторії [3], [4]. Проте побудова PH кривих не є тривіальною задачею через її нелінійну алгебраїчну структуру. Існує багато методів побудови просторових PH кривих в різних контекстах [8], [9], [11], [12], [13]. Слід відзначити, що важливе практичне значення має задача побудови просторових PH кривих із заданою формою. Відомо, що поліноміальна PH крива може бути представлена як крива Безьє. Проте контрольний багатокутник Безьє не підходить для керування формою PH кривих, оскільки незначна зміна багатокутника призводить до втрати властивості PH. Як альтернатива багатокутнику Безьє у роботах [6], [7] розглядається багатокутник Гаусса-Лежандра PH кривої з вершинами, отриманими обчисленням похідних у вузлах квадратури Гаусса-Лежандра. Такий підхід дозволяє керувати формою кривої, не втрачаючи властивості PH. Недоліком багатокутника Гаусса-Лежандра є те, що він не визначає дотичні вектори в кінцевих точках. Криві PH з однаковим багатокутником Гаусса-Лежандра можуть мати різні кінцеві дотичні вектори, оскільки всі вузли квадратур Гаусса-Лежандра є внутрішніми.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. PH криві викликають великий інтерес у науковців, оскільки вони є ефективним засобом для розв'язання багатьох прикладних задач. У роботі [15] криві PH використовуються для моделювання траєкторії руху матеріальної точки в просторі, надаючи компактне та безперервне представлення параметричних функцій траєкторії. Отримано багато результатів щодо інтерполяції типу Ерміта PH кривими ([11], [12]). У роботі [14] досліджується геометрична інтерполяція PH кривими довільного степеня n. Для розв'язання проблеми керування формою кривої у роботі [16] розглянуто випрямляючий керуючий багатокутник на основі квадратури Гаусса-Лобатто. Цей метод дає змогу деформувати PH криву в її контрольних точках, зберігаючи всі цікаві властивості PH кривих, та уникати недоліків, спричинених змінами контрольних точок Безьє. Крім того, цікавою особливістю використання контрольних точок Гауса-Лобатто є властивості інтерполяції кінцевих точок, кінцевих дотичних векторів і властивості збереження довжини кривої під час моделювання форми кривої.

Ціль статті. Побудова просторових PH кривих у різних практичних застосуваннях потребує керування формою кривої відповідно до вимог конкретної задачі. Ціль цієї статті – навести метод побудови просторових PH кривих за даним багатокутником на основі квадратури Гаусса-Радау з використанням підходу, викладеного у роботах [6], [7] та застосувати загальний метод для побудови кубічних просторових кривих за заданим багатокутником Гаусса-Радау. Побудова кривих на основі багатокутника Гаусса-Радау, як альтернативи багатокутникам Гаусса-Лежандра та Гаусса-Лобатто, дозволяє розглянути ще один клас просторових PH кривих адаптивної форми. Однією з переваг цього методу є те, що багатокутник Гаусса-Радау природно визначає початковий дотичний вектор кривої PH, оскільки початкова точка квадратури Гаусса-Радау є наперед визначеним вузлом.

Основна частина

1. Вступ

Просторові PH криві можна описати компактно алгебраїчними рівняннями за допомогою кватерніонів, які є розширенням комплексних чисел на чотиривимірний простір і мають властивості, що ідеально підходять для опису просторових об'єктів та їхньої динаміки. Для кватерніона $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, де $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}$, а i, j, k – уявні одиниці, справедливі співвідношення

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \tag{1}$$

з яких випливають співвідношення

$$ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j\ . \tag{2}$$

Множина всіх кватерніонів позначається $\mathbf{H}$ та є чотиривимірним векторним простором над полем $\mathbf{R}$ з базисом $\{1, i, j, k\}$. Крім того $\mathbf{H}$ є некомутативною алгеброю з діленням, множення в якій визначається співвідношеннями (1) та (2).

Дійсне число a_0 кватерніона $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ називається його скалярною частиною, а $\vec{v} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ – його векторною частиною. Якщо

$\vec{v}=0$, то кватерніон називається суто скалярним, а за умови $a_0=0$ – суто векторним кватерніоном. Суто векторний кватерніон $\vec{v}=a_1 i+a_2 j+a_3 k$ природним чином ототожнюється з радіус-вектором $\vec{v}=(a_1; a_2; a_3)$ тривимірного простору $\mathbf{R}^3$.

Спряжений кватерніон $\overline{q}$ до кватерніона $q=a_0+a_1 i+a_2 j+a_3 k$ визначається як $\overline{q}=a_0-a_1 i-a_2 j-a_3 k$. На множині кватерніонів $\mathbf{H}$ можна задати бінарну операцію $*$, наведену в роботі [12]:

$$q*p=\frac{1}{2}(qi\,\overline{p}+p\,i\,\overline{q}).$$

Кватерніон $q*p$ є суто векторним кватерніоном та є векторною частиною кватерніона $qi\,\overline{p}$. Відповідно n-й степінь кватерніона q позначається як q^{n*}. Багато задач, пов'язаних з побудовою просторових PH кривих, зводяться до розв'язання кватерніонного рівняння

$$q^{2*}=qi\,\overline{q}=v, \tag{3}$$

де q – невідомий кватерніон, а v – суто векторний кватерніон.

Всі розв'язки рівняння (3) можна записати у вигляді ([7]):

$$q=\begin{cases}\sqrt{|v|}ke^{i\varphi}, \textit{ якщо } v=-ai, a>0,\\ \sqrt[*]{v}e^{i\varphi}, \textit{ в інших випадках,}\end{cases} \text{ де } \sqrt[*]{v}=\frac{\dfrac{v}{|v|}+i}{\left|\dfrac{v}{|v|}+i\right|}. \tag{4}$$

Нехай у просторі $\mathbf{R}^3$ задана крива вектор-функцією $\vec{p}(t)=(x(t); y(t); z(t))$, $t\in[\alpha;\beta]\subseteq\mathbf{R}$, $x(t), y(t), z(t)$ – неперервні функції на $[\alpha;\beta]$. Її можна розглядати як суто векторну кватерніонну функцію $p(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$.

Нехай $x(t), y(t), z(t)\in\mathbf{R}[t]$ – деякі ненульові поліноми з дійсними коефіцієнтами. Просторова поліноміальна крива $p(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$ називається кривою годографа Піфагора (PH кривою) (див. [1], [10]), якщо її похідна $p'(t)=x'(t)i+y'(t)j+z'(t)k$ задовольняє умову Піфагора

$$x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2=\sigma(t)^2,$$

де $\sigma(t)$ – деякий поліном з $\mathbf{R}[t]$.

У роботі [2] показано, що просторова поліноміальна крива $p(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$ є PH кривою тоді і тільки тоді, коли її похідну можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned}
x'(t) &= u^2(t)+v^2(t)-w^2(t)-\rho^2(t), \\
y'(t) &= 2u(t)q(t)+2v(t)w(t), \\
z'(t) &= 2v(t)\rho(t)-2u(t)w(t), \\
\sigma(t) &= \pm(u^2(t)+v^2(t)+w^2(t)+\rho^2(t)),
\end{aligned} \tag{5}$$

де $u(t), v(t), w(t), \rho(t) \in \mathbf{R}[t]$.

Кватерніонне представлення поліноміальних просторових PH кривих описується теоремою.

Теорема 1 ([5]). Просторова поліноміальна крива $p(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$ непарного степеня $2n+1$ ($n \in \mathbf{N}$) є PH кривою тоді і тільки тоді існує кватерніонний поліном $A(t)=u(t)+v(t)i+w(t)j+\rho(t)k$ степеня n такий, що

$$p'(t) = A(t)\, i\, \overline{A(t)} = A(t)^{2*}.$$

2. Багатокутник Гаусса-Радау PH кривих

Нехай просторова поліноміальна крива задана кватерніонною функцію $p(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$, $x(t), y(t), z(t) \in \mathbf{R}[t]$, $t \in \mathbf{R}$. Крива Безьє $p(t)$ степеня n за даною множиною суто векторних кватерніонних контрольних точок Безьє $b_k = x_k i + y_k j + z_k k$ для $k=0,\dots,n$ визначається за формулою

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n} B_k^n(t) b_k,$$

де $B_k^n(t) = C_n^k (1-t)^{n-k} t^k$ – поліноми Бернштейна.

Похідну кривої Безьє $p(t)$ можна записати у вигляді

$$p'(t) = n\sum_{k=0}^{n} B_k^{n-1}(t)\Delta b_k, \text{ де } \Delta b_k = b_{k+1}-b_k.$$

Для контролю форми PH кривих із збереженням їхніх властивостей у роботах [6], [7] запропоновано використовувати багатокутник Гаусса-Лежандра як альтернативу керуючому багатокутнику Безьє. Ми розглянемо поняття багатокутника Гаусса-Радау на основі квадратури Гаусса-Радау на відрізку $[0;1]$. Квадратура Гаусса-Радау з n вузлами інтегровної функції $f(x)$, визначеної на $[0;1]$, є квадратурною формулою, заданою виразом

$$\int_0^1 f(x)dx = \omega_0 f(0) + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i f(x_i) + \varepsilon_n.$$

Вузли x_i для $i=1,...,n-1$ є коренями полінома $\dfrac{P_{n-1}(x)+P_n(x)}{x+1}$, де $P_k(x)=\dfrac{1}{2^k k!}\dfrac{d^k}{dx^k}\Big((x^2-1)^k\Big)-$ k -й поліном Лежандра степеня k.

Вагові коефіцієнти мають вигляд:

$$\omega_0=\frac{1}{n^2}, \quad \omega_i=\frac{1-x_i}{2\big(nP_{n-1}(x_i)\big)^2}=\frac{1}{2(1-x_i)\Big(P'_{n-1}(x_i)\Big)^2},\ (x_i\neq 1), i=1,...,n-1.$$

Залишковий член

$$\varepsilon_n=\frac{2^{2n-2}n\big((n-1)!\big)^4}{\big((2n-1)!\big)^3}f^{(2n-1)}(\xi),\ (0<\xi<1).$$

Зауважимо, що квадратура Гаусса-Радау дає точне значення інтеграла від поліномів степеня не вище $2n-3$.

Нехай $p(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$ – параметрична поліноміальна просторова крива, визначена на відрізку $[0;1]$. Багатокутник Гаусса-Радау кривої $p(t)$ з m ребрами визначається як

$$G_m(p)=[r_0,r_1,...,r_m],$$

де

$$r_0=p(0),$$

$$r_{k+1}=r_k+\omega_k p'(x_k), \text{ для } k=0,...,m-2. \qquad (6)$$

$$r_m=r_{m-1}+\omega_{m-1}p'(x_{m-1})+\varepsilon_m.$$

Багатокутник Гаусса-Радау $G_m(p)=[r_0,r_1,...,r_m]$ називається випрямляючим багатокутником, якщо у кінцевих опорних точках інтерполяції: $r_0=p(0)$, $r_m=p(1)$ та виконується випрямляюча властивість – довжина багатокутника $[r_0,r_1,...,r_m]$ рівна довжині кривої $p(t)$.

Зауважимо, що кількість ребер багатокутника Гаусса-Радау визначається кількістю вузлів квадратури Гаусса-Радау. Отже, будь-який багатокутник Гаусса-Радау повинен містити один початковий попередньо вибраний вузол. При цьому дотичний вектор у початковій точці рівний

$$p'(0)=\frac{1}{\omega_0}\Delta r_0=\frac{1}{\omega_0}(r_1-r_0).$$

Отже, багатокутник Гаусса-Радау поліноміальної PH кривої має властивість інтерполяції дотичної в початковій точці.

На рис. 1 продемонстровано контрольні точки багатокутника Гаусса-Радау $G_5(p)$ просторової кривої $p(t), t \in [0;1]$. Точки $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$ – контрольні точки Безьє кривої $p(t)$.

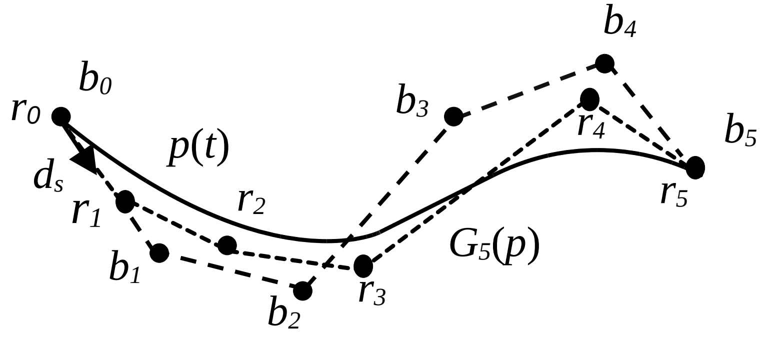

Рис. 1

Як наслідок з результатів робіт [6], [7] випливають твердження.

Твердження 1. Нехай $p(t)$ – поліноміальна просторова крива в просторі $\mathbf{R}^3$ степеня l визначена на відрізку $[0;1]$. Якщо $m \geq \frac{l}{2} + 1$, тоді $G_m(p)$ має властивість інтерполяції в кінцевій точці: $r_m = p(1)$.

Згідно з означенням (6) маємо

$$r_m = r_0 + \sum_{k=0}^{m-1} \omega_k p'(x_k) + \varepsilon_m .$$

Оскільки похідна $p'(t)$ має степінь $l-1$, то для довільного $l-1 \leq 2m-3$ квадратура Гаусса-Радао обчислює точний інтеграл

$$r_m = r_0 + \int_0^1 p(t)dt = p(1) .$$

Твердження 2. Нехай $p(t)$ – просторова крива HP в просторі $\mathbf{R}^3$ степеня $2n+1$ визначена на $[0;1]$. Якщо $m \geq n+2$, тоді багатокутник Гаусса-Радау $G_m(p) = [r_0, r_1, ..., r_m]$ є випрямляючим багатокутником.

Ми розглядаємо обернену задачу до твердження 2, яка полягає в знаходженні просторових PH кривих степеня $2n+1$, багатокутник Гаусса-Радау яких є заданим багатокутником $[r_0, r_1, ..., r_{n+1}]$.

3. Побудова PH кривих за багатокутником Гаусса-Радау

Нехай $p(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ – просторова поліноміальна PH крива степеня $2n+1$. За теоремою 1 похідна $p'(t)$ є $*$-квадратом деякого кватерніонного полінома $A(t)$ степеня n

$$p'(t) = A(t)^{2*} = A(t)i\overline{A(t)}.$$

Поліном $A(t)$ запишемо у вигляді полінома Безьє

$$A(t) = \sum_{l=0}^{n} B_l^n(t) A_l . \tag{7}$$

Нехай багатокутник Гаусса-Радау кривої $p(t)$ з $n+1$ ребрами є $[r_0, r_1, ..., r_{n+1}]$. Запишемо рівняння (6):

$$\Delta r_k = \omega_k p'(x_k) = \omega_k \left(\sum_{l=0}^{n} B_l^n(x_k) A_l \right)^{2*}, \; k = 0, ..., n-1,$$

$$\Delta r_n = \omega_n p'(x_n) + E_n = \omega_n \left(\sum_{l=0}^{n} B_l^n(x_n) A_l \right)^{2*} + \varepsilon_n .$$

Згідно з формулою (4) кожне з цих рівнянь можна подати у вигляді:

$$\sum_{l=0}^{n} B_l^n(x_k) A_l = \sqrt[*]{(\frac{\Delta r_k}{\omega_k})}\, e^{i\varphi_k}, \; k = 0, ..., n-1,$$

$$\sum_{l=0}^{n} B_l^n(x_n) A_l = \sqrt[*]{(\frac{\Delta r_n - \varepsilon_n}{\omega_n})}\, e^{i\varphi_n}, \tag{8}$$

де $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n \in \mathbf{R}$ – $(n+1)$ вільні параметри.

Рівняння (8) утворюють систему лінійних рівнянь

$$M_n\begin{pmatrix}A_0\\A_1\\\vdots\\A_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt[*]{\dfrac{\Delta r_0}{\omega_0}}\,e^{i\varphi_0}\\\sqrt[*]{\dfrac{\Delta r_1}{\omega_1}}\,e^{i\varphi_1}\\\vdots\\\sqrt[*]{\dfrac{\Delta p_n-\varepsilon_n}{\omega_n}}\,e^{i\varphi_n}\end{pmatrix},$$

основна матриця якої є матрицею Бернштейна-Вандермонда

$$M_n=\begin{pmatrix}B_0^n(x_0) & B_1^n(x_0) & \dots & B_n^n(x_0)\\B_0^n(x_1) & B_1^n(x_1) & \dots & B_n^n(x_1)\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\B_0^n(x_n) & B_1^n(x_n) & \dots & B_n^n(x_n)\end{pmatrix}.$$

Оскільки вузли x_k квадратури Гаусса-Радау різні, то матриця M_n оборотна і система лінійних рівнянь (8) має єдиний розв’язок $A_0, A_1,..., A_n$.

Отже, кватерніонний поліном $A(t)=A[\varphi_0,...,\varphi_n](t)$ залежить від $n+1$ вільних параметрів $\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_n\in\mathbf{R}$. Легко переконатися, що для довільного параметра $\varphi\in\mathbf{R}$ виконується рівність

$$A[\varphi_0-\varphi,\varphi_1-\varphi,...,\varphi_n-\varphi](t)^{2*}=A[\varphi_0,...,\varphi_n](t)^{2*}.$$

Звідси функція $A[\varphi_0,...,\varphi_n](t)$ з фіксованим параметром φ_0 описує всі можливі просторові PH криві, у яких багатокутник Гаусса-Радау з $n+1$ ребрами є даним багатокутником $[r_0,r_1,...,r_{n+1}]$. Покладемо $\varphi_0=0$. Таким чином, поліном $p[0,\varphi_1,...,\varphi_n](t)$, як розв’язок рівняння $p'(t)=A(t)^{2*}$, задає всі просторові PH криві степеня $2n+1$ такі, що $G_{n+1}(p)=[r_0,r_1,...,r_{n+1}]$.

Отже, існує нескінченно багато просторових PH кривих $p(t)$, що залежать від n параметрів $\varphi_1,...,\varphi_n\in\mathbf{R}$ і таких, що $G_{n+1}(p)=[r_0,r_1,...,r_{n+1}]$.

Приклад. Розглянемо багатокутник $[r_0,r_1,r_2]$, вузли якого мають вигляд: $r_0=(0;0;0)$, $r_1=(1;1;1)$, $r_2=(2;2;-1)$.

Знайдемо кубічні просторові криві, багатокутник Гаусса-Радау яких рівний $[r_0,r_1,r_2]$.

Маємо $n=1$, $\Delta r_0=(1;1;1)$, $\Delta r_1=(1;1;-2)$.

Вузли та ваги квадратури Гаусса-Радау для кубічного полінома рівні:

$x_0 = 0, \quad \omega_0 = \frac{1}{2};$

$x_1 \approx 0,689, \quad \omega_1 \approx 0,753, \quad \varepsilon_2 \approx 0,018.$

Матриця Бернштейна-Вандермонда

$$M_1 = \begin{pmatrix} B_0^1(x_0) & B_1^1(x_0) \\ B_0^1(x_1) & B_1^1(x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x_0 & x_0 \\ 1-x_1 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,31 & 0,69 \end{pmatrix}.$$

Маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,31 & 0,69 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt[*]{\dfrac{\Delta r_0}{\omega_0}} \\ \sqrt[*]{\dfrac{\Delta r_1 - \varepsilon_2}{\omega_1}} e^{i\varphi_1} \end{pmatrix}.$$

Прямими обчисленнями знаходимо:

$$A_0 = \sqrt[*]{\frac{\Delta r_0}{\omega_0}} \approx 0,209i + 0,119j + 0,238k,$$

$$A_1 = \frac{1}{0,69}\sqrt[*]{\frac{\Delta r_1 - \varepsilon_2}{\omega_1}} e^{i\varphi_1} - 0,449A_0 \approx -0,894\sin\varphi_1 + 0,894\cos\varphi_1 i +$$
$$+(0,506\cos\varphi_1 - 1,022\sin\varphi_1)j - (0,506\sin\varphi_1 + 1,022\cos\varphi_1)k.$$

Запишемо кватерніонний поліном $A(t)$ у вигляді (7):

$$A(t) = (1-t)A_0 + tA.$$

Підставивши отримані значення A_0 та A_1, отримаємо

$$A(t) = -0,894\sin\varphi_1 t + i(0,209 + 0,685t) +$$
$$+ j(0,119 + t(-0,119 + 0,506\cos\varphi_1 - 1,022\sin\varphi_1)) +$$
$$+ k(0,238 - t(0,238 + 0,506\sin\varphi_1 + 1,022\cos\varphi_1)).$$

Параметричні рівняння кривої $p(t)$ знайдемо з рівняння $p'(t) = A(t)i\overline{A(t)}$:

$$x'(t) = 0,799\sin^2\varphi_1 t^2 + (0,209 + 0,685t)^2 -$$
$$-(0,119 + t(-0,119 + 0,506\cos\varphi_1 - 1,022\sin\varphi_1))^2 -$$
$$-(0,238 - t(0,238 + 0,506\sin\varphi_1 + 1,022\cos\varphi_1))^2;$$

$$y'(t) = 2(-0,894\sin\varphi_1 t \cdot (0,238 - t(0,238 + 0,506\sin\varphi_1 + 1,022\cos\varphi_1)) +$$
$$+(0,209 + 0,685t)\cdot(0,119 + t(-0,119 + 0,506\cos\varphi_1 - 1,022\sin\varphi_1)));$$

$$z'(t) = 2((0,209 + 0,685t)\cdot(0,238 - t(0,238 + 0,506\sin\varphi_1 + 1,022\cos\varphi_1)) +$$
$$+0,894\sin\varphi_1(0,119 + t(-0,119 + 0,506\cos\varphi_1 - 1,022\sin\varphi_1))).$$

Проінтегрувавши знайдені вирази $x'(t), y'(t), z'(t)$ на проміжку $[0;t]$, $0 < t \le 1$, отримаємо рівняння просторової кривої третього степеня $p(t) = p[\varphi_1](t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$. Таким чином, маємо нескінченно багато кубічних PH кривих, що залежать від параметра $\varphi_1 \in \mathbf{R}$, у яких багатокутник Гаусса-Радау $[r_0, r_1, r_2]$.

Висновки та перспективи. Розглянуто метод побудови просторових поліноміальних PH кривих за заданим багатокутником Гаусса-Радау. Цей метод дозволяє знаходити нескінченну кількість PH кривих, які мають один і той же багатокутник Гаусса-Радау. На відміну від PH кривих, побудованих за багатокутником Гаусса-Лобатто, PH криві побудовані за багатокутником Гаусса-Радау, визначають дотичний вектор лише в початковій точці кривої. Цю властивість можна використовувати в задачах інтерполяції кривих сплайнами, що дозволяє визначати потрібний початковий дотичний вектор у внутрішніх вузлах склеювання сплайна. Запропонований метод побудови поліноміальних кривих PH на основі заданого багатокутника Гаусса-Радау може бути основою для подальшого вивчення властивостей таких кривих, а також бути адаптованим для алгебраїчно-тригонометричних PH кривих [17].

Література

1. *Farouki R., Sakkalis T.* Pythagorean-hodograph space curves. *Adv. Comput. Math.*. Vol. 2, 1994, P. 41–66.
2. *Dietz R, Hoschek J. and Jüttler B.*, An algebraic approach to curves and surfaces on the sphere and on other quadrics, *Comput. Aided Geom. Design.* V. 10, 1993, P. 211–229.
3. *Moetakef Imani B., Ghandehariun A.* Real-time PH-based interpolation algorithm for high speed CNC machining, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. V. 56, 5–8, 2011, P. 619–629.
4. *Tsai Y.-F., Farouki R.T., and Feldman B.* Performance analysis of CNC interpolators for time-dependent feedrates along PH curves, *Computer Aided Geometric Design*. V.18, N. 3, 2001, P. 245–265.

5. *Choi H., Lee D., and Moon H.* Clifford algebra, spin representation and rational parameterization of curves and surfaces, *Advances in Computational Mathematics*. V.17, 2002, P. 5–48.
6. *Kim S.H., Moon H.P.* Rectifying control polygon for planar Pythagorean hodograph curves, *Comput. Aided Geom. Des.* V. 54, 2017, P. 1–14.
7. *Kim S.H., Moon H.P.* Deformation of spatial septic Pythagorean hodograph curves using Gauss–Legendre polygon, *Comput. Aided Geom. Des.* V. 73, 2019, P. 16–34.
8. *Farouki R.T.* Existence of Pythagorean-hodograph quintic interpolants to spatial G1 Hermite data with prescribed arc lengths, *J. Symb. Comput.* V. 95, 2019, P. 202–216.
9. *Farouki R.T., et al., Kandari M., Sakkalis T.* Hermite interpolation by rotation-invariant spatial Pythagorean-hodograph curves, *Adv. Comput. Math.* V. 17, 2002, P. 369–383.
10. *Farouki R.T., Sakkalis T.* Pythagorean hodographs. *IBM J. Res. Dev.* V. 34, 1990, P. 736–752.
11. *Kwon S.H.* Solvability of G1 Hermite interpolation by spatial Pythagorean-hodograph cubics and its selection scheme, *Comput. Aided Geom. Des.* V. 27, 2010, P. 138–149.
12. *Šír Z., Jüttler B.,* C2 Hermite interpolation by Pythagorean hodograph space curves, *Math. Comput.* V. 76, 2007, P. 1373–1391.
13. *Аушева Н.М.* Моделювання сім'ї ізотропних просторових PH-кривих на основі кватерніонів із колінеарною векторною частиною, *Сучасні проблеми моделювання*. V. 7, 2016, C. 3–9.
14. *Jaklic G, Kozak J., Krajnc M., Vitrih V., Zagar E.* An approach to geometric interpolation by Pythagorean-hodograph curves, *Advances in Computational Mathematics*. V.37, 2012, P. 123-150.
15. *Arrizabalaga1 J., Markus R.* Spatial motion planning with Pythagorean Hodograph curves, IEEE 61st Conference on Decision and Control (CDC), 06-09 December 2022.
16. *Kim S.H., Moon H.P.* Gauss–Lobatto polygon of Pythagorean hodograph curves, *Comput. Aided Geom. Des*. 74, 101768.
17. *Romani L., Saini L, Albrecht G.* Algebraic-trigonometric Pythagorean-hodograph curves and their use for Hermite interpolation, *Advances in Computational Mathematics*, 2014, 40 (5-6), P. 977-1010.

Reference

1. *Farouki R., Sakkalis T.* Pythagorean-hodograph space curves. *Adv. Comput. Math.*. Vol. 2, 1994, P. 41–66. *{in English}*

2. *Dietz R, Hoschek J. and Jüttler B.,* An algebraic approach to curves and surfaces on the sphere and on other quadrics, *Comput. Aided Geom. Design.* V. 10, 1993, P. 211–229. *{in English}*
3. *Moetakef Imani B., Ghandehariun A.* Real-time PH-based interpolation algorithm for high speed CNC machining, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. V. 56, 5–8, 2011, P. 619–629. *{in English}*
4. *Tsai Y.-F., Farouki R.T., and Feldman B.* Performance analysis of CNC interpolators for time-dependent feedrates along PH curves, *Computer Aided Geometric Design*. V.18, N. 3, 2001, P. 245–265. *{in English}*
5. *Choi H., Lee D., and Moon H.* Clifford algebra, spin representation and rational parameterization of curves and surfaces, *Advances in Computational Mathematics*. V.17, 2002, P. 5–48. *{in English}*
6. *Kim S.H., Moon H.P.* Rectifying control polygon for planar Pythagorean hodograph curves, *Comput. Aided Geom. Des.* V. 54, 2017, P. 1–14.
7. *Kim S.H., Moon H.P.* Deformation of spatial septic Pythagorean hodograph curves using Gauss–Legendre polygon, *Comput. Aided Geom. Des.* V. 73, 2019, P. 16–34. *{in English}*
8. *Farouki R.T.* Existence of Pythagorean-hodograph quintic interpolants to spatial G1 Hermite data with prescribed arc lengths, *J. Symb. Comput.* V. 95, 2019, P. 202–216. *{in English}*
9. *Farouki R.T., et al., Kandari M., Sakkalis T.* Hermite interpolation by rotation-invariant spatial Pythagorean-hodograph curves, *Adv. Comput. Math.* V. 17, 2002, P. 369–383. *{in English}*
10. *Farouki R.T., Sakkalis T.* Pythagorean hodographs. *IBM J. Res. Dev.* V. 34, 1990, P. 736–752. *{in English}*
11. *Kwon S.H.* Solvability of G1 Hermite interpolation by spatial Pythagorean-hodograph cubics and its selection scheme, *Comput. Aided Geom. Des.* V. 27, 2010, P. 138–149. *{in English}*
12. *Šír Z., Jüttler B.,* C2 Hermite interpolation by Pythagorean hodograph space curves, *Math. Comput.* V. 76, 2007, P. 1373–1391. *{in English}*
13. *Ausheva N.M.* Modeliuvannia simi izotropnykh prostorovykh RN-kryvykh na osnovi kvaternioniv iz kolinearnoiu vektornoiu chastynoiu, *Suchasni problemy modeliuvannia.* V. 7, 2016, C. 3–9. *{in Ukranian}*
14. *Jaklic G, Kozak J., Krajnc M., Vitrih V., Zagar E.* An approach to geometric interpolation by Pythagorean-hodograph curves, *Advances in Computational Mathematics*. V.37, 2012, P. 123-150. *{in English}*
15. *Arrizabalaga1 J., Markus R.* Spatial motion planning with Pythagorean Hodograph curves, IEEE 61st Conference on Decision and Control (CDC), 06-09 December 2022. *{in English}*
16. *Kim S.H., Moon H.P.* Gauss–Lobatto polygon of Pythagorean hodograph curves, *Comput. Aided Geom. Des.* 74, 101768. *{in English}*

17. *Romani L., Saini L, Albrecht G.* Algebraic-trigonometric Pythagorean-hodograph curves and their use for Hermite interpolation, *Advances in Computational Mathematics*, 2014, 40 (5-6), P. 977-1010. *{in English}*

Ph.D., assoc. prof. **Nataliia Bondarenko**,
bondarenko.nv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-6078-9467
Ph.D., assoc. prof. **Valentyna Otrashevska**
otrashevska.vv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9879-1442
Kyiv National University of Construction and Architecture (KNUCA)

MODELING OF SPACE PYTHAGOREAN HODOGRAPH CURVES WITH GIVEN FORM

The method for constructing spatial polynomial Pythagorean hodograph curves (PH curves) from the given Gauss-Radau polygon is considered. PH curves are important in computer graphics, geometric modeling, motion control of a material point, and also in interpolation and approximation problems. Since the function of the rate of change of the arc length of the PH curve relative to the curve parameter is polynomial, this makes it possible to accurately calculate the arc length of any curve segment and perform rational displacements of the curve without using numerical methods. An arbitrary polynomial PH curve can be represented as a Bézier curve. However, a Bézier polygon is not suitable for controlling the shape of PH curves, since a slight change in the polygon leads to the loss of the PH property. The paper considers a Gauss-Radau polygon, the vertices of which are obtained by calculating derivatives at the nodes of the Gauss-Radau quadrature. The use of this polygon allows to control the shape of the curve without losing the PH property. The Gauss-Radau polygon naturally determines the initial tangent vector of the PH curve, since the initial point of the Gauss-Radau quadrature is a predefined node, and also has the property of interpolation of the endpoints. To describe spatial PH curves, a quaternion representation is used, which allows you to effectively model the curves, control their shape, and orientation in space. It is shown that there is an infinite number of polynomial spatial PH curves of degree, which depend on arbitrary parameters, with the same Gauss-Radau polygon with edges. The method for constructing such curves is given and applied to the construction of cubic spatial curves from a given Gauss-Radau polygon.

Keywords: Pythagorean hodograph curves; quaternion representation; Gauss-Radau quadrature; Gauss-Radau polygon; interpolation.