

к. ф-м. н. доцент **Наголкина З.І.**

zonagol@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2722-5176

к.ф-м.н. доцент **Філонов Ю.П.,**

yuri@fil.in.ua, ORCID: 0000-0002-1100-4854

Київський національний університет будівництва і архітектури

ОБГРУНТУВАННЯ ПРИЙНЯТНОСТІ ДЕЯКИХ МАРКІВСЬКИХ МОДЕЛЕЙ З КІЛЬКОМА РЕЖИМАМИ .

Розглядаються стохастичні моделі систем з кількома режимами, що управляються марківським ланцюгом. Маємо справу з системою, в якій існує базовий параметр X (дійсний, невід'ємний), відповідний таким реальним поняттям, як обсяг основного ресурсу (загальна сума на рахунку, тощо), та існує скінчена множина режимів роботи, а сама система керується однорідним незвідним марковським ланцюгом W_n із загальним простором станів (стани ланцюга є станами системи). Основними параметрами будуть режим $Z \in D\{1, 2, \dots, d\}$ роботи та рівень (об'єм) $X [0, \infty)$ основного ресурсу системи, які є функціями стану w . Прийнятна система - це коли при усіх $C \in$ майже напевне прямування до 100% долі тих n до моменту N ($N \rightarrow \infty$), для яких $X_n = X(W_n) > C$ (частки часу довільного високого рівня, попри можливі (при необмеженій кількості - дедалі рідкіші з часом) кризові падіння). Формальності (сепарабельність сігма-алгебри, незвідність ланцюга, мінорантність околів) – загальноприйнятні, а також деяка зв'язність режимів в один клас. Позначимо $a(w) = M_w(X_1 - X_0)$ та $p(w, j) = P_w(Z_1 = j)$ - середній приріст ресурсу та ймовірність зі стану w перейти до роботи в режимі j в наступному періоді; нехай ϵ обмеженість абсолютних моментів прирістів ресурсу. Дано два твердження. Перше. Нехай, коли $x = X(w) \rightarrow \infty$, ϵ гранична стохастична матриця P^0 для ймовірностей $p(w, j)$ для якої $|p(w, j) - P_{ij}^0| = O((x + 1)^{-2})$ (для всіх $i, j \in D, w \in E_i$) та для граничних нижніх меж a_i величин $a(w), w \in E_i \epsilon$ обмеженість знизу значень $(a(w) - a_i)(x + 1)^2$. Тоді ланцюг W_n непозитивний, а відповідна система прийнятна, коли $\sum \pi_i a_i \geq 0$, де $\pi_1, \dots, \pi_d$ - стаціонарні ймовірності для P^0 . Друге. Є послідовна зміна режимів ($w \in E_i$) $P_w(Z_1 = i + 1) = \alpha(w)$, $P_w(Z_1 = i) = 1 - \alpha(w)$ (ймовірності змін, тут $d + 1 = 1$ - додавання по циклу) і асимптотика ($X(w) \rightarrow \infty$) $a(w) = a_i + a_{0,i}x^{-1} + O(x^{-2})$, $\alpha(w) = \alpha_i + \alpha_{0,i}x^{-1} + O(x^{-2})$ при тому $a_i \geq 0$ при $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, d$. Тоді ϵ непозитивність і прийнятність: а) коли ϵ і що $a_i > 0, \alpha_i = 0$; б) коли $a_i = 0$

при $\alpha_i = 0$ і або сума $\sum' a_i \alpha_i^{-1} + \sum'' a_{0,i} \alpha_{0,i}^{-1}$ - додатне число (суми відповідно для ненульових та нульових α_i), або сума 0 і додатково $a_{0,i} \alpha_i \geq \alpha_{0,i} a_i$ для усіх i де α_i ненульові.

Ключові слова: однорідний ланцюг Маркова; асимптотичний розклад; стохастична матриця; системи обслуговування; режими роботи, середній прибуток; простий замкнутий цикл; сігма-алгебра; математичне сподівання; умовне середнє; умовна ймовірність; ергодичні характеристики; незвідний ланцюг Маркова; міра незвідності; ймовірності переходу; сполученість станів; збіжність майже напевно; стаціонарні ймовірності; неопозитивність ланцюга Маркова; мінорантна множина.

Постановка проблеми. Предмет дослідження в цій роботі - системи з кількома режимами, які управляються однорідним марковським ланцюгом. Режим визначається: наприклад, кількістю мережевих працівників, працюючих пристроїв, ліній обслуговування; типом - спеціальний, аварійний тощо, а також зовнішніми умовами. Марковські ланцюги використовуються при побудові економічних та інженерних моделей. Приклади марківських моделей, основні математичні методи та питання, пов'язані зі стійкістю (відповідно до питань даної роботи) у великому обсязі розглядалися відповідно в роботах [1, 2, 3]. Цією роботою закінчується обґрунтування тез роботи [4], почате в роботі [5], доводиться недоведене, проводиться ряд спрощень за формою та узагальнень за змістом, розглядаються додаткові варіанти. Конкретніше, відповідно до роботи [5], тут розглядається система, яка керується однорідним незвідним марковським ланцюгом W_n із загальним простором станів (стани ланцюга є станами системи). Основними параметрами будуть режим $Z \in D = \{1, 2, \dots, d\}$ роботи та рівень (об'єм) $X \in [0, \infty)$ основного ресурсу системи (наприклад, це стан поточного рахунку фірми) які є функціями стану w . Прийнятний розвиток (прийнятна система) це коли при усіх $C \in$ майже напевне прямування до 1 відносної долі тих n до моменту $N(N \rightarrow \infty)$ для яких $X_n = X(W_n) > C$ (прямування до 100% частки часу довільного високого благополуччя попри можливі тимчасові падіння.)

Мета статті. Отримати на підставі результатів роботи [5] умови прийняттого розвитку деяких марківських моделей в термінах математичних сподівань приростів основного ресурсу та ймовірностей зміни режимів.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Найбільш повно умови сталого розвитку розглядаються у книзі [3]. Пропонована робота пов'язана

ідейно з роботами: [6] (методи встановлення сталого розвитку), [7] (основи розгляду кількох режимів), [8] (схожа умова неергодичності для одного режиму), [4] (попередній опис розглянутих тут моделей та результатів), [5] (отримання базового результату, на підставі якого нижче виводяться результати для більш конкретних моделей). Ця робота деяким чином завершує останні дві.

Основна частина. У загальних позначеннях теорії ймовірності зробимо загальні припущення для наших моделей. Позначення: $M_w(\dots)$ та $P_w(\dots)$ – умовне середнє та умовна ймовірність при умові $W_0 = w$; $\delta = X_{n+1} - X_n$ – приріст ресурсу (прибуток); $a = a(w) = M_w \delta$ – середній прибуток; $p(w, j) = P_w(Z_1 = j)$ – ймовірність зі стану w перейти до роботи в режимі j в наступному періоді; $E_i = \{w | Z(w) = i\}$, ($i \in D$) – множина станів, коли система працює в i -му режимі. Формальні математичні припущення (див. [2]): сігма-алгебра фазового простору сепарабельна, ланцюг незвідний, величина X суттєво необмежена, множина $\{w | X < C\}$ є скінченною сумою мінорантних (small) множин при усіх достатньо великих C . Також припускаємо обмеженість моментів $M_w |\delta| < C$ та достатню сполученність режимів: існують стала $e > 0$, простий замкнутий цикл режимів $k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow \dots \rightarrow k_{d+1} = k_1$, для будь якого числа C числа C' такі, що при $X(w) > C'$ буде: $P_w(\delta < -e, Z_1 = Z_0) > e$, $P_w(Z_1 = k_{i+1}, X_1 > C) > 0$ (якщо $Z(w) = k_i$), досяжність усіх суттєвих (не нульової міри незвідності) підмножин в $\{w | X > C'\}$ (при забороненій множині $\{w | x < C\}$).

Модель 1 (проста зміна режимів). Нехай якість роботи системи за один період може або зберегтися, або погіршитися до наступного рівня (рівні відповідають режимам від 1-го до d -го). Позначимо відповідні ймовірності переходів:

$$\alpha(w) = P_w(Z_1 = i + 1) > 0 (w \in E_i, P_w(Z_1 = i) = 1 - \alpha(w)),$$

тут $d + 1 = 1$ (додавання по циклу), останній режим d – режим ремонту, в якому ми ще залишаємось, або повертаємось до режиму 1 повноцінної роботи.

Твердження 1(модель 1). Нехай є числа l_i , $\sum l_i \geq 0$, для яких значення виразу $l_i \alpha(w) - a(w)$ для всіх $i \in D, w \in E_i$ обмежені зверху значеннями деякої додатної функції від $x = X(w)$, спадної інтегрованої на $[0, \infty)$. Тоді м.л. W_n неперитивний, а відповідна система прийнятна.

Доведення твердження 1. Введемо позначення, які будемо використовувати не тільки для моделі один, але і в загальному випадку: $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_d)$ – набір станів $(w_1, w_2, \dots, w_d)$ з умовою $Z(w_i) = i$, $i = 1, 2, \dots, d$, перехідні ймовірності $p(w_i, j)$ режимів вважаємо елементами матриці $P(\bar{w})$, вектор $\pi(\bar{w}) = (\pi_1(\bar{w}), \pi_2(\bar{w}), \dots, \pi_d(\bar{w}))$ – це розподіл стаціонарних ймовірностей для неї. Вектор $a(\bar{w}) = (a(w_1), \dots, a(w_d))$ це

набір середніх прибутків в станах з набору $\bar{w}$. Збільшимо значення функції $a(w)$ на значення спадної додатної функції $\psi(x)$ з умови твердження:

$$a'(w) = a(w) + \psi(x), \text{ де } x = X(w), \int_0^\infty \psi(x) dx < \infty.$$

Тепер конкретно для моделі 1. Візьмемо $\pi_i = \alpha_i^{-1}, \alpha_i = \alpha(w_i)$. Тоді виконуються рівності $\pi_{i+1} = \pi_i \alpha_i + \pi_{i+1}(1 - \alpha_{i+1})$. Це означає, що розподіл $\bar{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_d)$ є пропорційним до стаціонарного розподілу $\pi(\bar{w})$ для матриці $P(\bar{w})$, т.я. матриця $P(\bar{w})$ побудована тут з елементів $\alpha_i, 1 - \alpha_i$, а для одного класу станів стаціонарний розподіл єдиний з точністю до пропорційності. Ланцюг W_n неергодичний, а відповідна система прийнятна, якщо для усіх $\bar{w}$ з достатньо великими $X(w_i)$ вірна нерівність $\pi(\bar{w})a'(\bar{w}) \geq 0$ (робота [5]), тобто достатньо перевірити нерівність $\bar{\pi}a'(\bar{w}) \geq 0$.

Перевіряємо:

$$\bar{\pi}a'(\bar{w}) = \sum \alpha_i^{-1}(a(w_i) + \psi(X(w_i))) \geq \sum \alpha_i^{-1}(a(w_i) + l_i \alpha(w_i) - a(w_i)) = \sum \alpha_i^{-1} l_i \alpha_i = \sum l_i \geq 0.$$

Таким чином твердження 1 доведено.

Слідуюче твердження є більш визначеним (і наслідком першого).

Твердження 2 (модель 1 з асимптотикою) .

Нехай для усіх i при $Z(w)=i$ є скінченні границі:

$$(1) s_i = \lim(a(w)\alpha^{-1}(w)(X(w) \rightarrow \infty),$$

для яких вираз $(x+1)^2(s_i \alpha(w) - a(w))$ обмежений зверху та

$$(2) \sum_i s_i \geq 0.$$

Тоді ланцюг W_n неперіодичний, а відповідна система прийнятна.

Твердження 2 випливає з твердження 1, якщо прирівняти $l_i = s_i$, а функцію $\psi(x)$ в доведенні твердження 1 взяти у вигляді $C(x+1)^{-2}$. Умова інтегровності на півосі забезпечена, умови обмеженості в твердженні та у його наслідку узгоджуються та узгоджується зі збіжністю у визначенні s_i .

Твердження 3. (узагальнення твердження 2). Твердження 2 залишиться справедливим, якщо границі в (1) замінити на нижні границі, а замість $(x+1)^2$ узяти будь-яку функцію f , де $1/f$ невід'ємна, спадна, інтегровна на $[1, \infty)$ функція. Якщо допустити нескінченні значення нижніх границь, звичайно зі знаком плюс, тоді тільки цього достатньо для справедливості твердження. Доведення аналогічне попередньому доведенню.

А тепер нехай для моделі 1 є така асимптотика ($x \rightarrow \infty$) (на відміну від попереднього тут a та α з індексами це числа а не величини, що залежать від станів):

$$(3) a(w) = a_i + a_{0,i}x^{-1} + O(x^{-2})$$

(4) $\alpha(w) = \alpha_i + \alpha_{0,i}x^{-1} + O(x^{-2})$, при тому $a_i \geq 0$ в (3) коли $\alpha_i = 0$ в (4) (пишуть $u = O(v)$ якщо $|u| < Cv$ для деякого $C > 0$). Також можна писати $x + 1$ замість x зважаючи на обмеженість $\alpha(w), a(w)$.

Твердження 4. Для моделі 1 з асимптотикою (3), (4),

м.л. W_n – непозитивний, а відповідна система прийнятна:

а) коли є i що $a_i > 0, \alpha_i = 0$; б) коли $a_i = 0$ при $\alpha_i = 0$ і або сума $\sum' a_i \alpha_i^{-1} + \sum'' a_{0,i} \alpha_{0,i}^{-1}$ – додатне число (суми відповідно для ненульових та нульових α_i), або ця сума 0 і додатково $a_{0,i} \alpha_i \geq \alpha_{0,i} a_i$ для усіх i де α_i ненульові.

Доведення твердження 4. Ситуація $\alpha_i = 0, a_i \neq 0$ для деякого i підходить до твердження 3. У іншому підходящому випадку з асимптотики (3) (4) випливає що $s_i = a_i \alpha_i^{-1}$ (або $a_{0,i} \alpha_{0,i}^{-1}$) в (1). Ліву частину в (2) позначимо S . При $S = \sum' a_i \alpha_i^{-1} + \sum'' a_{0,i} \alpha_{0,i}^{-1} = 0$ вираз $A = (x + 1)^2 (s_i \alpha(w) - a(w))$ з твердження 2 має вигляд:

$$(x + 1)^2 (a_i \alpha_i^{-1} (\alpha_i + \alpha_{0,i} x^{-1} + O(x^{-2})) - (a_i + a_{0,i} x^{-1} + O(x^{-2}))) = (x + 1)^2 \alpha_i^{-1} (a_i \alpha_{0,i} - \alpha_{0,i} a_i) x^{-1} + O(1).$$

Коли $\alpha_i \neq 0$ і з умови $a_{0,i} \alpha_i \geq \alpha_{0,i} a_i$ твердження, випливає, що вираз A обмежений зверху, тобто застосовано твердження 2.

Або A має вигляд (при $\alpha_i, a_i = 0$),

$$(x + 1)^2 (a_{0,i} \alpha_{0,i}^{-1} (\alpha_{0,i} x^{-1} + O(x^{-2})) - (a_{0,i} x^{-1} + O(x^{-2}))) = (x + 1)^2 O(x^{-2}) = O(1) \text{ (зауваження після (4))},$$

тобто теж обмежений зверху і теж застосовне твердження 2. Якщо ж $S > 0$ то усі доданки в S можна зменшити на деяке $\epsilon > 0$ зі збереженням додатності S та взяти $l_i = s_i - \epsilon$ для виразу $l_i \alpha(w) - a(w)$ (підставити (3),(4) та значення $s_i = a_i \alpha_i^{-1}$ (або $a_{0,i} \alpha_{0,i}^{-1}$) сюди і зробити викладки як для виразу A вище). Побачимо що застосоване твердження 1. Усі варіанти перевірені, твердження 4 доведено.

Якщо в твердженні 4 прибрати варіанти з нулями ($\alpha_i = 0$), то отримаємо, як наслідок, більш просте твердження 5.

Твердження 5. Виконання нерівності $\sum a_i \alpha_i^{-1} > 0$ або нерівностей $a_{0,i} \alpha_i \geq \alpha_{0,i} a_i$ для всіх i коли $\sum a_i \alpha_i^{-1} = 0$ достатньо для непозитивності м.л. W_n та прийнятності системи.

Модель 2. (Довільні ймовірності переходів режимів з асимптотикою для них). Нехай є стохастична матриця P^0 , гранична для перехідних ймовірностей $p(w, j)$ до режимів при зростанні рівня $X(w) \rightarrow \infty$, також нехай

станів з D сполучаються по циклу $k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow \dots \rightarrow k_{d+1} \rightarrow k_1$ (з припущення зробленого на початку основної частини для наших моделей) за матрицею P^0 . Позначимо $\pi_1, \dots, \pi_d$ - стаціонарні ймовірності для неї. Для цієї матриці та деяких чисел a_i запишемо співвідношення:

$$(5) (a(w) - a_i)(x + 1)^2 \text{ обмежено знизу};$$

$$(6) \sum \pi_i a_i \geq 0;$$

$$(7) |p(w, j) - P_{ij}^0| = O((x + 1)^{-2}) (x = X(w) \rightarrow \infty)$$

(для всіх $i, j \in D, w \in E_i$.)

(хорошим значенням для a_i буде нижня границя $a(w)$ ($w \in E_i$) при достатній швидкості збіжності до a_i (при $X(w) \rightarrow \infty$))

Твердження 6. (Модель2). При виконанні умови граничної обмеженості середніх прибутків в режимах знизу (5), умови (б) невід'ємності середньозваженого цих границь за граничними стаціонарними ймовірностями режимів, умови (7) збіжності при $x \rightarrow \infty$ перехідних ймовірностей режимів м.л. W_n неперіодичний а відповідна система прийнятна.

Твердження 7 (узагальнення твердження 6). Твердження 6 залишиться справедливим якщо умови (5) та (7) замінити на:

$$(8) a(w) \geq a_i - \psi(x) \text{ та}$$

$$(9) |p(w, j) - P_{ij}^0| = O(\psi(x))$$

де $\psi(x)$ невід'ємна, спадна, інтегровна на $[0, \infty)$ функція.

Доведення твердження 7. Якщо деяка стохастична матриця P визначає 1 клас станів на D , то для неї є єдиний розв'язок рівняння $\bar{\pi}(I - P) = 0$ відносно рядка $\bar{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_d)$ з умовою $\sum \pi_i = 1$, розв'язок співпадає з стаціонарним розподілом ймовірностей, також обов'язково $\pi^* = \min_i \pi_i > 0$.

Єдиність упомянутого розв'язку означає, що ранг матриці $I - P$ дорівнює $d - 1$. Тому у матриці Q , яка є транспонованою до приєднаної матриці до матриці $I - P$ рядки будуть ненульові та пропорційні $\bar{\pi}$ (матриця Q складається з алгебраїчних доповнень матриці $I - P$ та задовільняє рівності $(I - P) = \Delta I = 0$ як і рядок $\bar{\pi}$, тут $\Delta = 0$ - визначник для $(I - P)$). Далі матимемо справу із загальними позначеннями з доведення твердження 1.

Співвідношення (9) означає виконання (9) для елементів матриці P^0 з моделі 2 та матриці $P(\bar{w})$ а, враховуючи скінченну кількість дій додавання та множення при знаходженні алгебраїчних доповнень та обмеженість в сукупності елементів матриць, це співвідношення буде виконуватись і для алгебраїчних доповнень матриць $I - P^0$ та $I - P(\bar{w})$ з заміною правої частини на мажоранту ($\psi(x^*)$), де $x^* = \min_i x(w_i)$ (монотонність функції ψ).

Відповідно до попереднього абзацу (важлива обмеженість та віддаленість від

нуля як стаціонарних ймовірностей так і алгебраїчних доповнень) таке співвідношення буде виконуватись і для елементів векторів $\bar{\pi}$ (узятого для матриці P^0 замість P) та $\pi(\bar{w})$ (узятого для матриці $P(\bar{w})$):

$$(10) |\pi_j(\bar{w}) - \pi_j| = O(\psi(x^*)).$$

Не складно довести (математикам відомо) що існує функція ψ' з описаними вже властивостями функції ψ , але яка спадає більш повільно: $\psi(x) = o(\psi'(x))$. Визначимо вектори $\bar{a}$, $a(\bar{w})$, $\psi'(\bar{w})$, $\psi(\bar{w})$ в моделі 2 відповідно з елементами a_i , $a(w_i)$, $\psi'(x)$, $\psi(x)$ де $x = X(w_i)$, а також вектор $a^1(\bar{w}) = a(\bar{w}) + \psi'(\bar{w})$. Далі, позначення $\bar{O}(\psi(x))$ використовується для вектора, у якого кожна координата має порядок $O(\psi(x))$. Позначимо скалярний добуток $A = \pi(\bar{w})a^1(\bar{w})$. Використовуючи (10), обмеженість середніх стрибків, визначення $a^1(\bar{w})$ та $\bar{O}(\psi(x))$ можна написати:

$$A = (\bar{\pi} + \bar{O}(\psi(x^*))) (a(\bar{w}) + \psi'(\bar{w})) = \bar{\pi}(a(\bar{w}) + \psi'(\bar{w})) + O(\psi(x^*)).$$

Продовжимо оцінювати A , тепер застосуємо (8) та означення $O(\psi(x^*))$ і $\psi'(\bar{w})$:

$$\begin{aligned} A &\geq \bar{\pi}(\bar{a} - \psi(\bar{w}) + \psi'(\bar{w})) + O(\psi(x^*)) = \\ &\bar{\pi}(\bar{a} + \psi'(\bar{w})) + O(\psi(x^*)) \geq \bar{\pi}\bar{a} + \min_i \pi_i \psi'(x^*) + O(\psi(x^*)) \geq 0 \end{aligned}$$

при великих x^* а, якщо змінити начення ψ' на скінченному проміжку, то і завжди $A = \pi(\bar{w})a^1(\bar{w}) \geq 0$. Залишилося застосувати теорему 1 із роботи [5] де $\pi(\bar{w})a^1(\bar{w}) \geq 0$ основна умова.

Доведення твердження 7 (значить і твердження 6) завершено.

Висновки та перспективи. У статті отримано умови, які дозволяють системам, які можуть працювати в різних режимах і керуються однорідним марковським ланцюгом у загальному фазовому просторі станів бути прийнятними (самодостатніми, самоокупними) в сенсі необмеженого збільшення свого основного ресурсу X (загальна сума на рахунку). Хоча окремі падіння суми на рахунку не виключаються і навіть можлива потенційно необмежена кількість падінь ресурсу, які треба покривати (страховими виплатами, які в моделях включаємо в δ - приріст ресурсу). Оскільки частота розорень з необхідністю буде падати з часом (неергодичність відповідного марківського ланцюга), для страхової компанії буде перевищення доходів над витратами, тобто прийнятність буде і для системи (фірми) і для страхової компанії, що веде до співпраці. У роботах [4, 5] авторів на цю тему було доведено загальне твердження, у якого основна умова - невід'ємність виразу типу суми середніх прибутків, зважених по стаціонарним імовірностям режимів, що інтуїтивно сприймається як умова, яка необхідна для рентабельності. Але там був отриманий результат не для виразу з конкретним набором імовірностей та середніх, а для схожого виразу,

складним чином залежному від усіх станів фазового простору що суттєво впливало на прямі застосування. Тут же доведені результати, які містять числові параметри. Розглянута модель 1, коли режими змінюються у чіткій послідовності по циклу з геометрично розподіленим часом до переходу у слідуючий режим та модель 2, коли режими при збільшенні ресурсу роблять переходи, які наближуються до переходів довільного марковського ланцюга з одним класом станів, що сполучаються. Приведені 7 тверджень для цих моделей з математичним обґрунтуванням.

У подальшому можливі такі напрямки роботи:

1. Розглянути не дводіагональну, а тридіагональну матрицю переходів і формулювати результат не в стаціонарних ймовірностях, а в перехідних.
2. Розглянути зміну режимів по типу процесів відновлення.
3. Розглянути практично важливі випадків 2х та 3х режимів з можливістю формулювати результати не в стаціонарних ймовірностях, а в перехідних.
4. Розглянути системи з елементами однорідності по фазовому простору.
5. В попередніх моделях розглянути асимптотику .
6. В попередніх моделях розглянути межеві випадки прийнятності.

Література

1. *Yuri SUHOV and Mark KELBERT*. Probability and Statistics by Example: Volume 2, Markov Chains, Cambridge University Press, 2008, ISBN: 978-0-521-84767-4
2. *E. Nummelin*, General irreducible Markov chains and nonnegative operators, Cambridge University Press, London, 1984
3. *S. Meyn and R.L. Tweedie*, Markov chains and stochastic stability, Springer-Verlag, New York, 1993
4. *Філонов Ю.П., Наголкіна З.І.* Розвиток багаторежимної накопичувальної марковської системи. / *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ : КНУБА, 2020. № 99. С. 200-207.
5. *Наголкіна З.І., Філонов Ю.П.* Загальна умова прийнятного функціонування марківської системи з кількома режимами / *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ : КНУБА, 2023. № 104. С. 119-126.
6. *Mikhaylenko V., Filonov Yu.* (2015). Unlimiteness by the probability system that are guided by common homogeneous Markov chain / *Management of Development of Complex systems*, 22 (1), 107-115 .

7. *Filonov Yu.* Markov chains with finite -component state space / *Theory Probab. and Math. stat.* , No 40, 1990. С.110-115 .

8. *Філонов Ю.П* , *Шутовський О.М* . ,Посилена ознака неергодичності критичної моделі зростання / *Матеріали 17-ї міжн.н. конф. ім. М.Кравчука* (3) . Київ : НПУУ,2016. С163-166.

Referances

1. *Yuri SUHOV and Mark KELBERT.*Probability and Statistics by Example: Volume 2, Markov Chains, Cambridge University Press, 2008, ISBN: 978-0-521-84767-4

2. *E.Nummelin,* General irreducible Markov chains and nonnegative operators, Cambridge University Press, London, 1984

3. *S.Meyn and R.L.Tweedie,* Markov chains and stochastic stability, Springer-Verlag, New York, 1993

4. *Filonov Yu.P., Naholkina Z.I.* Rozvytok bahatorezhymnoi nakopychuvalnoi markovskoi systemy. / *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika.* Kyiv : KNUBA, 2020. № 99. S. 200-207.

5. *Naholkina Z.I., Filonov Yu.P.* Zahalna umova pryiniatnoho funktsionuvannia markivskoi systemy z kilkoma rezhymamy / *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika.* Kyiv : KNUBA, 2023. № 104. S. 119-126.

6. *Mikhaylenko V., Filonov Yu.* (2015).Unliteness by the probability system that are guided by common homogeneous Markov chain / *Management of Development of Complex systems*, 22 (1), 107-115 .

7. *Filonov Yu.* Markov chains with finite -component state space / *Theory Probab. and Math. stat.* No 40, 1990. S.110-115 .

8. *Filonov Yu.P* , *Shutovskyi O.M* .Posylena oznaka neerhodychnosti krytychnoi modeli zrostannia / *Materialy 17-yi mizhn.n. konf. im. M.Kravchuka* (3) . Kyia : NPUU,2016. S163-166.

Ph. D., assoc. prof **Zoya Nagolkina**

zonagol@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2722-5176

Ph. D., assoc. prof **Yuri Filonov**,

yuri@fil.in.ua, ORCID: 0000-0002-1100-4854

Kyiv National University of Construction and Architecture» (KNUCA)

RATIONALE OF THE ACCEPTABILITY OF SOME MARKOV MODELS WITH SEVERAL REGIMES

Stochastic models of systems with multiple regimes controlled by a Markov chain are considered. We are dealing with a system (controlled by a homogeneous irreducible Markov chain W_n) with parameters $X(w) \geq 0$ (for example, the total amount on the account) and $Z(w) \in D = \{1, 2, \dots, d\}$ (operating mode), w - states of the chain (system), formalities – general and some connectivity of modes into one class. An acceptable system is one where for all C there is almost surely a tendency towards 1 relative fraction of those n up to time N ($N \rightarrow \infty$) for which $X_n = X(W_n) > C$ (although falling below some fixed level are possible, even in an unlimited quantity). Here the provisions on acceptability that were not proven in [4,5] are proven, and there are improvements and generalizations. Note $a(w) = M_w(X_1 - X_0)$ and $p(w, j) = P_w(Z_1 = j)$ – the average increase in the resource (let the absolute moments of the increments be limited) and the probability of transition from state w to mode j per step. Here are two provisions of this work. First. Let when $x = X(w) \rightarrow \infty$, there is a limit stochastic matrix P^0 for probabilities $p(w, j)$ for which $|p(w, j) - P_{ij}^0| = O((x + 1)^{-2})$ (for all $i, j \in D, w \in E_i$) and for the boundary lower bounds a_i of the values $a(w)$, $w \in E_i$ there is a boundedness from below of the values $(a(w) - a_i)(x + 1)^2$. Then the chain W_n is non-positive, and the corresponding system is acceptable when $\sum \pi_i a_i \geq 0$, where $\pi_1, \dots, \pi_d$ are stationary probabilities for P^0 . Second. There is a sequential change of modes ($w \in E_i$) $P_w(Z_1 = i + 1) = \alpha(w)$, $P_w(Z_1 = i) = 1 - \alpha(w)$ (probabilities of changes, here $d+1 = 1$ - addition over the cycle) and asymptotics ($X(w) \rightarrow \infty$) $a_i + \alpha_{0,i}x^{-1} + O(x^{-2})$, $\alpha(w) = \alpha_i + \alpha_{0,i}x^{-1} + O(x^{-2})$ moreover, $a_i \geq 0$ for $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, d$. Then there is non-positivity of the chain and acceptability of the system: a) when exists i that $a_i > 0, \alpha_i = 0$; b) when $a_i = 0$ with $\alpha_i = 0$ and, or the sum $\sum' a_i \alpha_i^{-1} + \sum'' \alpha_{0,i} \alpha_{0,i}^{-1}$ - a positive number (sums for non-zero and zero α_i respectively), or the sum of 0 and additionally $\alpha_{0,i} \alpha_i \geq \alpha_{0,i}$ for all i where α_i are non-zero.

Keywords. Homogeneous general Markov chain, service systems, operating modes, state transition probabilities, stationary probabilities, neighborhoods of points, small set, stochastic matrix, almost surely convergence, mathematical expectation, absolute moments, multi-mode system, average profit, simple closed cycle, separability of sigma algebra, conditional average, connectivity of modes, asymptotic distribution, lower bounds, conditional probability, ergodic characteristics, irreducible Markov chain, measure of irreducibility, non-positivity of Markov chain.