

## **ПОБУДОВА ЛІНІЙ ОДНАКОВОГО КУТА НАХИЛУ НА ОСНОВІ КОНГРУЕНЦІЇ НОРМАЛЕЙ**

*Описано методи побудови ліній з однаковим кутом нахилу (ЛОКН), які базуються на аналізі нормалей до криволінійних поверхонь та застосуванні конгруенцій кривих другого порядку. Ці методи дозволяють визначити області рівномірного розтікання бетонної суміші, оцінити напружено-деформований стан конструкції та спрогнозувати зони можливих деформацій під час бетонування складних просторих покриттів.*

*Метод аналізу нормалей передбачає визначення геометричних параметрів поверхні та виділення множини нормалей, що утворюють заданий кут  $\alpha$  із горизонтальною площиною. Визначено, що кожна нормаль до криволінійної поверхні впливає на поведінку бетонної суміші, оскільки визначає напрямок розтікання та накопичення напружень у матеріалі. У точках з різкими змінами нормалей можуть виникати локальні напруження, що призводять до утворення мікротріщин та нерівномірного ущільнення бетонної суміші.*

*Для математичного моделювання ЛОКН застосовано конгруенції кривих другого порядку, які описують множини нормалей із фіксованим кутом нахилу. Використано методи параметричного представлення поверхонь, що дозволяють аналітично визначити розподіл нормалей та їхній вплив на геометрію бетонної оболонки. Зокрема, для поверхонь другого порядку ЛОКН формують поверхню нормалей четвертого порядку, що дозволяє прогнозувати поведінку бетонної суміші під час твердіння.*

*Отримані результати підтвердили, що побудова ЛОКН із використанням конгруенцій нормалей забезпечує оптимізацію процесу бетонування, дозволяючи мінімізувати локальні деформації, рівномірно розподілити напруження у бетоні та уникнути дефектів, пов'язаних із неоднорідністю структури матеріалу. Запропонований підхід може бути використаний при розрахунку складних оболонкових конструкцій, зокрема куполів, склепін та несучих елементів мостів, де контроль напружень та рівномірність бетонної суміші є критично важливими параметрами.*

*Ключові слова: монолітні просторові покриття; деформації бетону; конгруенція нормалей; фізико-геометричний аналіз; оптимізація технології бетонування.*

**Постановка проблеми.** При проектуванні та будівництві монолітних просторих покриттів часто зустрічаються поверхні складної геометричної форми. На цих поверхнях важливо визначати лінії з однаковим кутом нахилу (ЛОКН), оскільки вони враховуються у загальній технологічній оцінці та допомагають ухвалювати рішення щодо процесу виготовлення оболонки. Це дозволяє оптимізувати технологію будівництва, полегшує виготовлення опалубки та дає змогу уникнути помилок при бетонуванні чи монтажі. На криволінійних поверхнях опалубки можуть виникати деформації пластичного бетону. Це місця, де можливе утворення напливів, тріщин або відшарування фрагментів покриття, особливо якщо немає відповідної формувальної оснастки. Для запобігання таким проблемам застосовують спеціальні заходи зміцнення.

Криві на поверхні є геометричним місцем точок, де бетонна суміш має однаковий стан у межах умовно однорідного середовища. ЛОКН є лініями на поверхні, де бетонна суміш має однакові фізичні властивості. Моделювання дозволяє глибше зрозуміти поведінку бетону на складних поверхнях. Реологічні залежності, дослідження цих характеристик допомагає у фізико-геометричному моделюванні стану бетонної суміші на криволінійних формах. Це дослідження дозволяє зрозуміти, як бетон поводить себе на складних формах, щоб правильно прогнозувати його розтікання та застигнення.

Побудова ЛОКН дозволяє вирішувати такі завдання: визначення меж зон деформацій у монолітних просторових покриттях під час будівництва відповідно до реологічних характеристик застосовуваної бетонної суміші; поділ областей деформацій на окремі елементи з однаковими дотичними напруженнями, швидкостями зсувних деформацій і тангенціальними складовими прискорення вільного падіння по двох взаємно протилежних контурних лініях.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** У [1] проводиться огляд сучасних тенденцій у технології бетону, зосереджуючись на впровадженні нових матеріалів для покращення властивостей бетону в цивільному будівництві. Наукове джерело [3] надає фундаментальний аналіз поведінки залізобетонних конструкцій під різними навантаженнями, що є корисним для дослідження складних геометричних форм у будівництві. Робота [2] описує фізичні та механічні властивості бетону, включаючи його поведінку при різних умовах експлуатації. У виданні [4] розглядаються мікроструктурні аспекти бетону та їх вплив на його властивості, що є важливим при проектуванні та будівництві складних бетонних форм. Публікація [5] пропонує сучасні методи розрахунку та проектування залізобетонних конструкцій з акцентом на механічні аспекти та дизайн.

**Цілі статті.** Розробка методу побудови ліній з однаковим кутом нахилу (ЛОКН) на криволінійних поверхнях бетонних конструкцій на основі аналізу нормалей та конгруенції кривих другого порядку для

прогнозування поведінки бетонної суміші під час її формування та твердіння.

**Основна частина.** Геометрична модель побудови сімейств ЛОКН відіграє ключову роль у формуванні монолітних просторових покриттів, оскільки дозволяє враховувати фізико-геометричні особливості процесу бетонування. Вона є важливим елементом комплексної моделі формоутворення зовнішньої результативної поверхні конструкції, що забезпечує правильне розтікання та рівномірний розподіл бетонної суміші.

Одним із важливих аспектів цієї моделі є врахування процесу утворення тонкого шару бетонної суміші, який формується на поверхні опалубки та визначає кінцеву якість покриття. Також враховуються особливості руху шарів бетонної суміші, що залежать від її в'язкості, швидкості укладання та сил гравітації. Ще одним важливим фактором є взаємодія бетонної суміші з арматурою, оскільки арматурний каркас створює додаткові перешкоди для руху рідини, що може спричиняти нерівномірний розподіл напружень і деформацій. Модель враховує осідання покриття після розпалубки, тобто процес, під час якого бетонна конструкція змінює свою форму через власну вагу та внутрішні напруження після зняття опалубки. Геометрична модель ЛОКН є необхідною для точного прогнозування поведінки бетонної суміші та забезпечення високої якості монолітного покриття.

У співвідношенні поверхні  $E$  з горизонтальною площиною  $\Sigma$  ЛОКН є лініями, що проходять через точки, у яких дотичні площини  $T$  нахилені під одним і тим самим кутом  $\alpha$  до горизонтальної площини  $\Sigma$ . Іншими словами, це місця, де нахил поверхні залишається постійним. Також ЛОКН можна визначити як геометричне місце основ нормалей  $N$  до поверхні  $E$ , де кут нахилу нормалі  $N$  до горизонтальної площини  $\Sigma$  дорівнює  $90^\circ - \alpha$  (рис. 1).

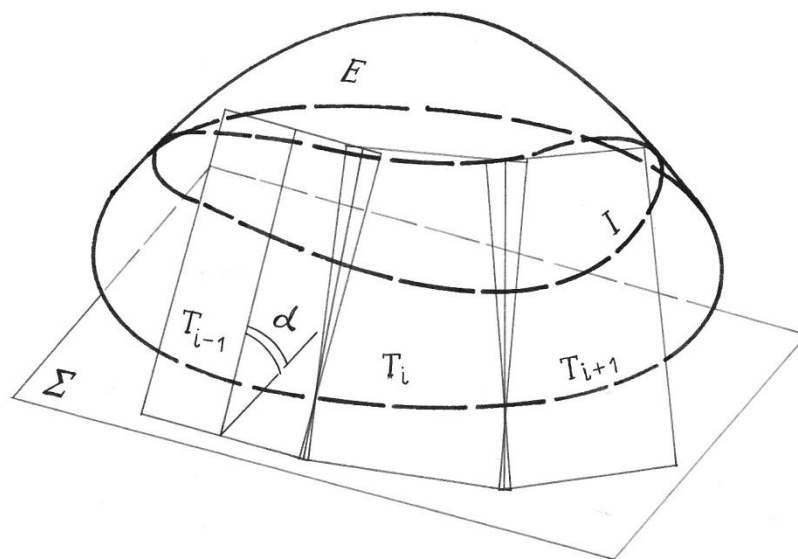


Рис. 1. Геометричне місце основ нормалей  $N$  до заданої поверхні  $E$

Побудова ЛОКН із конструктивної точки зору виконується наступним чином. З множини нормалей до поверхні  $E$ , яка задана аналітично або дискретно, виділяються ті нормалі, що утворюють певний кут нахилу  $\alpha$  із горизонтальною площиною  $\Sigma$ . Це досягається введенням у простір конгруенції, яка відповідає нескінченно віддаленій кривій другого порядку  $\Lambda$ , що визначається круговим конусом  $\Phi$  з віссю, перпендикулярною площині  $\Sigma$ , та кутом нахилу твірних  $\alpha$  [7]. Введення у простір конгруенції нормалей ґрунтується на побудові напрямного конуса  $\Phi$ , твірні якого нахилені під фіксованим кутом  $\alpha$  до горизонтальної площини  $\Sigma$  (рис. 2). Цей конус визначає множину нормалей, що утворюють однаковий кут нахилу із площиною, що дозволяє виділити лінії з однаковим кутом нахилу (ЛОКН) на криволінійних поверхнях. Конус  $\Phi$  описується рівнянням

$$x^2 + y^2 = (z \tan \alpha)^2, \quad z \geq 0, \quad (1)$$

що визначає сукупність твірних, напрямлених від початку координат і нахилених під фіксованим кутом  $\alpha$ . Його основа є нескінченно віддаленою кривою другого порядку  $\Lambda$ , яка розташована в площині  $z = h$  і має рівняння

$$x^2 + y^2 = (h \tan \alpha)^2. \quad (2)$$

Вона визначає область, в якій нормалі до поверхні мають однаковий кут нахилу до горизонтальної площини.

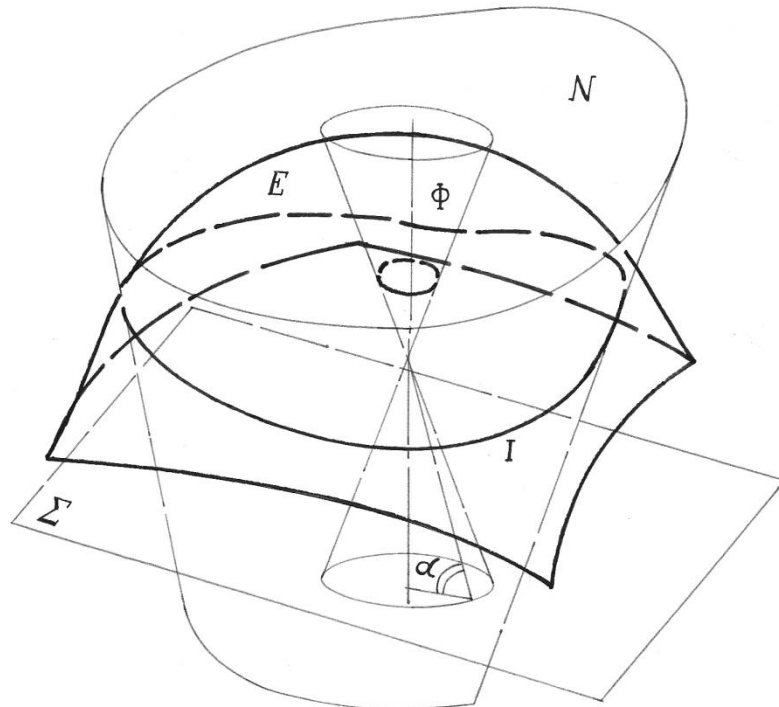


Рис. 2. Побудова ЛОКН у просторі конгруенції

Твірні конуса формують лінійчату поверхню нормалей  $N$ , яка може бути записана параметрично через координати точки вздовж твірної. Її рівняння у параметричній формі мають вигляд:

$$\begin{aligned} X(t, \theta) &= th \tan \alpha \cos \theta, \\ Y(t, \theta) &= th \tan \alpha \sin \theta, \\ Z(t) &= th, \end{aligned} \quad (3)$$

де параметр  $t$  змінюється у межах від 0 до 1, а  $\theta$  визначає напрям у горизонтальній площині. У результаті формується лінійчата поверхня нормалей  $N$  з напрямним конусом  $\Phi$ . Отримана система дозволяє точно визначати геометричне місце точок, що формують ЛОКН, та аналізувати їх.

Якщо поверхня  $E$  є алгебраїчною, то можна визначити її порядок. Для поверхонь другого порядку, наприклад, поверхня нормалей  $N$  матиме четвертий порядок [6]. Перетин початкової поверхні  $E$  і поверхні нормалей  $N$  дає шукану ЛОКН. Однопараметричне сімейство цих ліній утворюється шляхом зміни значення кута  $\alpha$  у необхідних межах.

У загальному випадку побудова поверхні нормалей  $N$  передбачає виділення певної множини нормалей із загального набору геометричних об'єктів. Це відбувається шляхом звуження множини можливих напрямків нормалей. Спочатку розглядається чотирипараметричне множина твірних, яка включає всі можливі напрямки нормалей до поверхні  $E$ . Оскільки кожна нормаль визначається своїм положенням на поверхні та напрямком, така множина має чотири параметри: дві координати точки дотику та два кути, що задають напрямок нормалі. Далі серед усіх можливих нормалей виділяється трипараметричне множина конусів  $\Phi$ , де кожен конус має три параметри: вершину, напрямок осі та кут розкриття. Осьова симетрія конусів дозволяє спростити аналіз розташування нормалей у просторі. На останньому етапі формується двопараметричне множина прямих, яка включає тільки ті, що є дійсними нормальми до поверхні  $E$ .

Оскільки кожна точка поверхні має лише одну нормаль, таке обмеження зменшує кількість параметрів до двох. Побудова поверхні нормалей полягає в поступовому звуженні множини можливих напрямків нормалей: спочатку розглядаються всі можливі нормалі, потім лише ті, що лежать у конусах, а в підсумку залишаються тільки ті, що є нормальми до поверхні  $E$ .

Для квадричних поверхонь поверхня нормалей є лінійчатою двоосевою поверхнею четвертого порядку  $\Omega$  [6]. Вона формується тоді, коли її твірні проходять через плоский переріз, який є перпендикулярним до головного напрямку, а також через дві мимобіжні прямі  $m$  та  $n$ , які паралельні двом іншим головним напрямкам квадричної поверхні.

Головні напрямки квадричної поверхні визначають її основні осі симетрії та геометричні властивості. Головні напрямки поверхні визначаються через головні кривини  $k_1, k_2$  та відповідні головні осі. Вони знаходяться як власні вектори тензора другої фундаментальної форми:

$$II = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}, \quad \det(II - kI) = 0, \quad (4)$$

де  $L, M, N$  — коефіцієнти другої фундаментальної форми, які залежать від часткових похідних. Для кожної точки  $P(x, y, z)$  нормаль  $N(P)$  знаходиться як градієнт, а рівняння нормалі в параметричній формі записується як:

$$\begin{aligned} X(t) &= x + t \frac{\partial F}{\partial x}, \\ Y(t) &= y + t \frac{\partial F}{\partial y}, \\ Z(t) &= z + t \frac{\partial F}{\partial z}, \end{aligned} \quad t \in [0, 1] \quad (5)$$

Поверхня нормалей формується як сукупність всіх нормалей квадричної поверхні  $E$ , що проходять через переріз  $\Pi$  та дві мимобіжні прямі  $m$  і  $n$ . Це виражається через рівняння у вигляді

$$\Omega: G(x, y, z) = 0, \quad (6)$$

де  $G(x, y, z)$  — поліном четвертого порядку, що визначає лінійчатую поверхню. Твірні поверхні нормалей проходять через точки, що лежать на площині перерізу  $\Pi$ , а також через дві мимобіжні прямі  $m, n$ . Вони описуються рівняннями:

$$\begin{aligned} m: x &= a_1 t + b_1, y = c_1 t + d_1, z = e_1 t + f_1, \\ n: x &= a_2 s + b_2, y = c_2 s + d_2, z = e_2 s + f_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Сукупність цих прямих утворює лінійчатую поверхню  $\Omega$  четвертого порядку. Плоский переріз, перпендикулярний до одного з них, задає базову площину, в якій розташовані точки дотику нормалей. Дві мимобіжні прямі  $m$  та  $n$ , що паралельні решті двох головних напрямків, визначають напрямки твірних, уздовж яких формується поверхня нормалей. Лінійчатая поверхня  $\Omega$  четвертого порядку містить множину нормалей, які організовані таким чином, що їхній розподіл відображає геометричну структуру квадричної поверхні. Це дозволяє аналітично досліджувати

зміну напрямку нормалей та оцінювати напружено-деформований стан матеріалу в залежності від його геометричних властивостей.

Твірні двоосевої поверхні  $\Omega$  визначаються як результат перетину двох конусів, що мають спільну вершину. Один із них – це прямий круговий конус  $\Gamma$ , твірні якого нахилені під фіксованим кутом  $\alpha$ . Другий – це напрямний конус загального вигляду  $\Phi$ . Коли квадрична поверхня знаходиться в канонічному положенні, обидва конуси  $\Gamma$  і  $\Phi$  мають спільні осі (рис. 3).

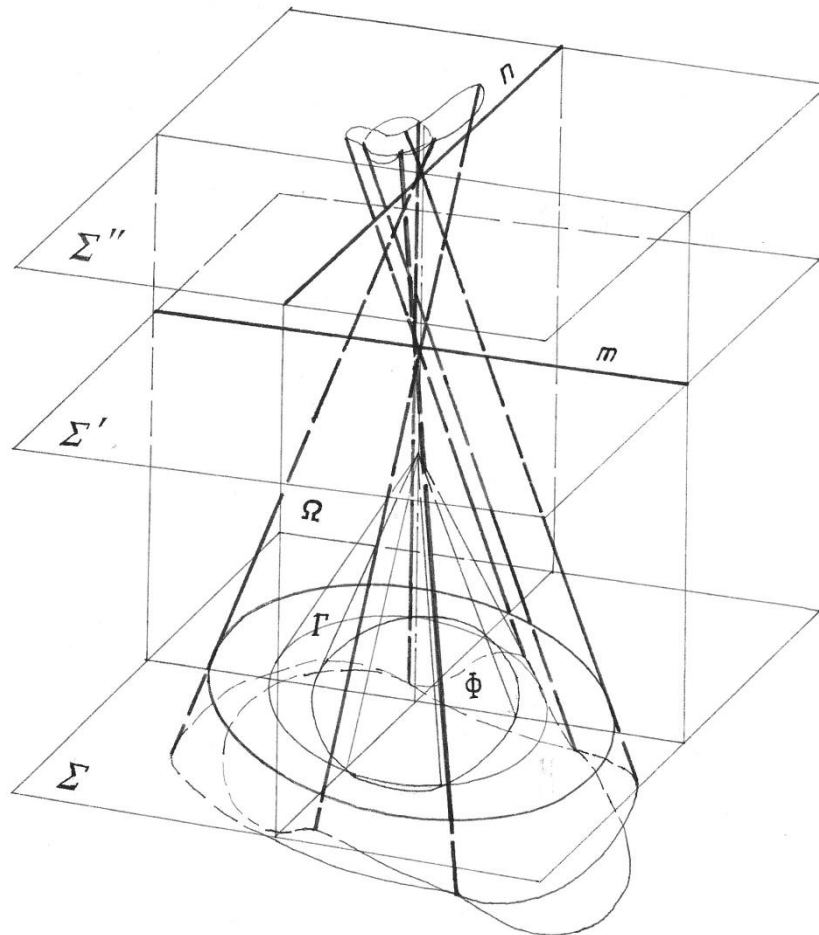


Рис. 3 Лінійчата двоосьова поверхня четвертого порядку  $\Omega$

Якщо ж квадрична поверхня є загального вигляду, тобто її орієнтація в просторі не відповідає канонічному положенню, то вісь конуса  $\Gamma$  буде розташована таким чином, що вона буде перпендикулярною до горизонтальної площини  $\Sigma$ . Напрямок нормалей та їх взаємодія із загальною геометрією поверхні визначається положенням цих конусів, а їх перетин визначає поведінку нормалей у просторі.

Інший спосіб побудови поверхні нормалей  $N$  передбачає використання двох прямих кругових конусів  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$ , вершини яких знаходяться на осях  $n$  і  $m$ . Конуси визначають напрямки нормалей у просторі та допомагають сформуванню поверхні нормалей до початкової квадричної поверхні. Твірні поверхні нормалей  $N$  утворюються як

результат перетину двох площин  $\Gamma$  і  $\Delta$ . Ці площини проходять через осі  $n$  та  $m$ , що є головними напрямками квадрики. Вони містять дві твірні, які є паралельними між собою. Твірні відповідають напрямкам, узгодженим із конусами  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$ , що визначають геометричну структуру нормалей.

Цей підхід дозволяє більш точно визначити форму поверхні нормалей, оскільки вона виникає внаслідок перетину площин і конусів. Це дає можливість контролювати поведінку нормалей на криволінійних поверхнях та аналізувати їх взаємодію з конструктивними елементами. Застосування цього методу важливе при проектуванні складних оболонкових конструкцій, де точне розташування нормалей впливає на міцність і стійкість матеріалу.

**Висновки та перспективи досліджень.** Запропонований підхід ґрунтується на аналізі нормалей до криволінійних поверхонь та використанні конгруенцій кривих другого порядку. Для поверхонь другого порядку нормалі формують поверхню четвертого порядку, що дозволяє з високою точністю прогнозувати поведінку бетонної суміші. Використання геометричного аналізу нормалей допомагає регулювати процес укладання бетону та підбирати ефективний склад бетонної суміші. Отримані результати можуть бути використані при проектуванні складних бетонних конструкцій: куполів, мостів, оболонкових перекриттів. Метод побудови ЛОКН дозволяє удосконалити процес бетонування складних конструкцій, зменшення зон напружень та покращення міцності конструкцій.

Подальше дослідження може бути спрямоване на розробку узагальнених математичних моделей, які враховують нелінійні деформації бетону та його в'язкопружні властивості. Вивчення впливу різних параметрів поверхонь (змінної кривини, граничних умов) на поведінку ЛОКН дозволить розширити область застосування отриманих результатів.

## Література

1. *Muhammad Muhsin*. Advances in Concrete Technology Based on New Materials and Applications. KHWARIZMIA (2024). Vol. 1 (2024). 1-15. <https://doi.org/10.70470/KHWARIZMIA/2024/010>
2. *A. M. Neville*. Properties of Concrete. 5th Edition. Prentice Hall (2012). 846 pages. ISBN: 978-0273755807.
3. *Park, R., & Paulay, T.* Reinforced Concrete Structures. John Wiley & Sons (1975). 769 p. ISBN: 978-0471659174.
4. *P. Kumar Mehta ma Paulo J. M. Monteiro*. Concrete: Microstructure, Properties, and Materials. McGraw-Hill Professional (2005). 659 p. ISBN: 978-0071462891
5. *MacGregor, J. G., & Wight, J. K.* Reinforced Concrete: Mechanics and Design. Pearson Education (2005). 1-1230. ISBN: 978-0131976429.
6. *Обухова В. С.* Линейчатые поверхности 4-го порядка общего вида / Межведомственный научно-технический сборник «Прикладная геометрия

и инженерная графика». К.: Будівельник, 1971. Вып. 13. С. 14-19.

7. Подгорный А.Л. Методика геометрического вариантного моделирования форм архитектурных оболочек / Межведомственный научно-технический сборник «Прикладная геометрия и инженерная графика». К: Будівельник, 1976. Вып. 22. С. 18-23.

## References

1. *Muhannad Muhsin*. Advances in Concrete Technology Based on New Materials and Applications. KHWARIZMIA (2024). Vol. 1 (2024). 1-15. <https://doi.org/10.70470/KHWARIZMIA/2024/010>
2. *A. M. Neville*. Properties of Concrete. 5th Edition. Prentice Hall (2012). 846 pages. ISBN: 978-0273755807.
3. *Park, R., & Paulay, T.* Reinforced Concrete Structures. John Wiley & Sons (1975). 769 p. ISBN: 978-0471659174.
4. *P. Kumar Mehta ma Paulo J. M. Monteiro*. Concrete: Microstructure, Properties, and Materials. McGraw-Hill Professional (2005). 659 p. ISBN: 978-0071462891
5. *MacGregor, J. G., & Wight, J. K.* Reinforced Concrete: Mechanics and Design. Pearson Education (2005). 1-1230. ISBN: 978-0131976429.
6. *Obukhova V. S.* Linejchatye poverkhnosti 4-go porjadka obshhego vida / Mezhdovedomstvennyj nauchno-tekhnicheskij sbornik «Prikladnaja geometrija i inzhenernaja grafika». K.: Budivel'nyk, 1971. Vyp. 13. S. 14-19.
7. *Podgornyj A. L.* Metodika geometricheskogo variantnogo modelirovanija form arkhitekturnykh obolochek / Mezhdovedomstvennyj nauchno-tekhnicheskij sbornik «Prikladnaja geometrija i inzhenernaja grafika». K: Budivel'nyk, 1976. Vyp. 22. S. 18-23.

D.Sc., prof. **Usenko Valerii**

valery\_usenko@ukr.net, ORCID: 0000-0002-4937-6442  
National University "Yurii Kondratyuk Poltava Polytechnic"

## CONSTRUCTION OF LINES WITH EQUAL INCLINATION ANGLE BASED ON NORMAL CONGRUENCE

*The methods for constructing lines of equal inclination angle (LEIA) based on the analysis of normals to curved surfaces and the application of second-order congruences are described. These methods allow for the determination of areas of uniform concrete mixture flow, the assessment of the stress-strain state of the structure, and the prediction of possible deformation zones during the concreting of complex spatial coverings.*

*The normal analysis method involves determining the geometric parameters of the surface and identifying a set of normals that form a given angle  $\alpha$  with the horizontal plane. It has been established that each*

*normal to a curved surface influences the behavior of the concrete mixture, as it defines the direction of flow and the accumulation of stresses in the material. At points with abrupt changes in normal orientation, local stresses may arise, leading to the formation of microcracks and uneven compaction of the concrete mixture.*

*For the mathematical modeling of LEIA, second-order curve congruences were applied, describing a set of normals with a fixed inclination angle. Parametric surface representation methods were used, enabling the analytical determination of normal distribution and their influence on the geometry of the concrete shell. In particular, for second-order surfaces, LEIA forms a fourth-order normal surface, which allows for predicting the behavior of the concrete mixture during hardening.*

*The obtained results confirmed that the construction of LEIA using normal congruences ensures optimization of the concreting process, allowing for the minimization of local deformations, the uniform distribution of stresses in the concrete, and the avoidance of defects related to material structure heterogeneity. The proposed approach can be utilized in the design of complex shell structures, such as domes, vaults, and load-bearing bridge elements, where stress control and uniform concrete mixture flow are critically important parameters.*

*Keywords: monolithic spatial coverings; concrete deformations; normal congruence; physico-geometric analysis; optimization of concreting technology.*