УДК 517.583:624.07
DOI: 10.32347/0131-579x.2025.109.3-17

к. т. н., доцент **Безклубенко І.С.,**
bezklubenko.is@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-9149-4178
к. т. н., професор **Гетун Г. В.,**
getun.gv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-3317-3456
Київський національний університет будівництва і архітектури

КАТЕНАРІЯ ТА ЇЇ ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ В БУДІВНИЦТВІ

Застосування графіків функцій в архітектурі тісно пов'язане з використанням математичних кривих і поверхонь для створення як естетично привабливих, так і структурно ефективних форм. Вони є ключовими інструментами в інженерному розрахунку та сучасному параметричному дизайні. Важливе місце займає алгоритмічний дизайн, де форма об'єкта визначається за допомогою набору правил (алгоритму) та математичних залежностей між параметрами. Замість прямого моделювання геометрії, дизайнер створює логічну структуру, яка генерує форму об'єкта, використовуючи математичні функції (лінійні, поліноміальні, тригонометричні, логарифмічні, тощо) для обчислення значень одного параметра на основі інших. Катеноїди та ланцюгові лінії (або ланцюгові криві) є важливими математичними концепціями, які знаходять своє застосування, зокрема, в архітектурі та інженерії завдяки їх унікальним властивостям, пов'язаним із мінімізацією енергії та напружень. Робота присвячена аналізу геометричних та математичних особливостей катенарії (ланцюгової лінії). Розглянуто теоретичні аспекти та природне і практичне застосування ланцюгової лінії у різних технічних напрямах діяльності. Подано математичний опис катенарії та досліджено її геометричні та структурні властивості, що дозволяють використання саме такої форми у різних напрямах діяльності, зокрема в інженерії, будівництві мостів, у стародавній і сучасній вуличній архітектурі. У дослідженні відзначено, що катенарія є ключовою кривою в інженерії підвісних мостів (звисаюча форма), а перевернута катенарія (ланцюгова арка) – в архітектурі арок та склепінь (як у мостах, так і в елементах, що можуть бути частиною великих фонтанних комплексів), забезпечуючи оптимальну ефективність використання матеріалу та конструктивну міцність. Зроблено висновок про можливість поширення сфер застосування катенарії.

Ключові слова: катенарія; ланцюгова лінія; геометрична модель; арки; мости; практичне застосування.

Постановка проблеми. Математики займалися вивченням властивостей кривих з глибокої давнини, і назви багатьох незвичайних кривих пов'язані з іменами тих, хто вперше їх досліджував, наприклад: спіраль Архімеда, локон Аньезі, цисоїда Діоклеса, конхоїда Нікомеда, лемніската Бернуллі, Декартів лист, равлик Паскаля. Деякі назви кривих пов'язані з природною формою предметів або процесів, які вони описують (як, наприклад, ланцюгова лінія, трактриса, строфоїда, кардіоїда, є ціла група спіралей, циклоїд, тощо). Як бачимо, кривих величезна кількість і кожна з них має свої унікальні властивості, особливості та сфери застосування. Тут же розглянемо лише одну з найцікавіших кривих у математиці, інженерії та архітектурі, так звану ланцюгову лінію (катенарію), скільки вона описує форму, яку приймає ідеальний, гнучкий ланцюг або канат, що вільно звисає під дією власної ваги між двома точками опори.

Однорідна мотузка або ланцюг, вільно підвішена набуває форми графіка функції

$$y = ach\left(\frac{x}{a}\right),$$

в наслідок чого гіперболічний косинус називають ланцюговою лінією, як показують розрахунки, арка у вигляді перевернутої ланцюгової лінії найбільш ефективно розподіляє навантаження. Дослідження фактичної форми підвішених проводів ліній електропостачання в порівнянні з теоретичною ланцюговою лінією дає важливу інформацію про реальний механічний стан проводів. Те саме стосується і тросових (ланцюгових) утримуючих (швартових) систем в морському та річному пароплавстві. Важливим залишається питання про зміну форм ланцюгової лінії під впливом додаткових навантажень, наприклад, у випадку ЛЄП — вітрових навантажень. Таким чином, не визиває сумнівів значимість гіперболічного косинуса, особливо в зв’язку з розгляданням ланцюгової лінії; не втратили вони своєї значимості і в сучасних математичних додатках.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Питання дослідження математичних і структурних властивостей ланцюгової лінії та катенарійних форм зберігає свою актуальність упродовж тривалого часу. У роботі [1] принципи теорії граничної рівноваги, розроблені для сталевих конструкцій, застосовано до кам'яної кладки, припускаючи, що матеріал не має опору розтягу, має необмежений опір стиску і не ковзає. Роботи [2, 3] присвячені аналізу інноваційних конструктивних та геометричних методів архітектора Гауді, які дозволяли йому створювати структурно досконалі, органічні форми без додаткових опор. У роботі [4] досліджується питання використання ланцюгової лінії при побудові висячих та вантових мостів. Розглянуте використання сітки, що складається з обернених катенарій, яка дає основу для тонкостінних залізобетонних куполів. У роботі [5] автор доводить, що зменшення поперечних перерізів конструктивних елементів за рахунок використання катенарійної форми порівняно з прямокутними або круглими формами, що працюють на вигин, веде до економії матеріалів і зниженню вуглецевого сліду будівництва. Використанню катенарійних форм у сучасних методах параметричного проєктування присвячено роботу [6]. Усі представлені роботи демонструють зв'язок між теоретичними математичними концепціями та їхніми практичними застосуваннями у інженерії та архітектурі.

Ціль статті. Мета роботи полягає в короткому, але при цьому повному огляді розвитку гіперболічного косинуса (ланцюгової лінії). Провести аналіз геометричних та структурних особливостей ланцюгової лінії, дослідити її математичні властивості та побудувати геометричну модель, підібрати приклади із природного середовища, у старовинній та сучасній архітектурі, інженерії та будівництві, визначити сфери можливого застосування в різних галузях.

Основна частина. Одним із перших, хто намагався описати цю криву був Галілео Галілей (XVII ст.), але він помилково припустив, що вона є параболою [7]. Подібна плутанина для творчості Галілея є надзвичайно рідкісною. Можна навіть сказати – виняткова. Але вона й дуже симптоматична: у Середньовіччі математикам, як і механікам і архітекторам, цілком вистачало прямих і кіл. Галілей був першим, хто зробив крок до розширення цього скромного набору. Зовні катенарія і парабола виглядають дуже схоже, особливо біля вершини, що й призвело до цієї помилки. Важливо зазначити, що хоча катенарія і парабола схожі за формою, вони математично різні [8]:

- Катенарія — це форма, яку приймає ланцюг під власною вагою (навантаження рівномірно розподілене вздовж довжини кривої). Її рівняння пов'язане з гіперболічним косинусом ($ch(x)$).
- Парабола — це форма, яку приймає кабель моста, що підтримує рівномірно розподілене навантаження по горизонталі (наприклад, вага проїжджої частини). Її рівняння є звичайним квадратним поліномом ($y = ax^2 + bx + c$).

Форма ланцюгової лінії відмінна від квадратичної параболи, яка більш полога, але це стає очевидним тільки при достатньому віддалені від вершини (рис.1) [9].

Катенарія є ідеальною для арки, що підтримує тільки власну вагу, тоді як парабола — для підвісного моста з рівномірним горизонтальним навантаженням.

Слід зазначити, що прямого і свідомого використання катенарії (ланцюгової лінії) як математично обґрунтованої форми в архітектурі глибокої давнини (наприклад, у Стародавньому Єгипті, Греції чи Римі) не існувало. У давнину та Середньовіччі найпоширенішою і найміцнішою формою для арок була півколова арка або стрілчаста арка. Ці форми дуже добре розподіляли навантаження, але вони не є ідеальною катенарією. Формулу для ланцюгової лінії — ту саму, що використовує гіперболічний косинус — було знайдено і повністю описано лише у наприкінці XVII столітті До цього часу криву плутали з параболою [10].

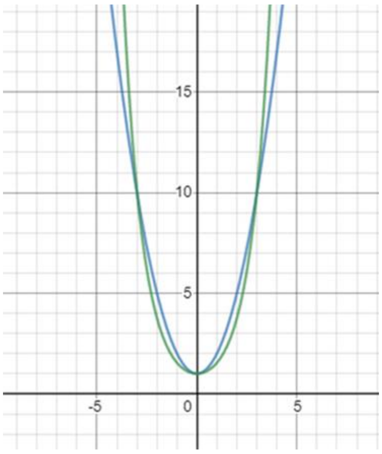

Рис. 1. Форма ланцюгової лінії відмінна від квадратичної параболи

Щоправда, провисання як природне явище існувало завжди. Прикладом катенарії в природі є павутина. Окремі нитки павутини, які провисають між точками кріплення, також набувають форми ланцюгової лінії, тобто кривої, яку приймає ідеалізований гнучкий ланцюг, канат або нитка, закріплені на обох кінцях і підвішені лише під дією власної ваги в рівномірному гравітаційному полі. Кожна окрема нитка павутиння, яка не несе додаткового навантаження (крім своєї маси), формує цю математичну криву.

Ланцюгові лінії часто зустрічаються в природі. Наприклад, прямокутне вітрило під натиском вітру набуває форми, яка у профілі близька до ланцюгової лінії.

Хоча катенарія не використовувалася свідомо в будівництві, сама форма провисання (тобто природна катенарія) була відома і використовувалася для простих цілей:

Мотузки та канати: Усі мотузки, підвішені між двома точками, незалежно від епохи, набували форми катенарії. Це стосувалося канатних переправ, мотузкових мостів і навіть простих мотузок для сушіння одягу.

Існує гіпотеза, що деякі будівничі могли використовувати підвішений ланцюг або мотузку як фізичний шаблон для створення особливо міцних арок, навіть не знаючи математичного рівняння. Якщо перевернути форму провисаючого ланцюга, вийде ідеальна арка, яка не потребує контрфорсів і розподіляє навантаження лише через стиснення. Хоча прямих історичних доказів цього методу з давнини мало, він є логічним інженерним прийомом [11].

Перші згадки гіперболічних функцій зустрічаються у роботах англійського математика, учня та помічника І. Ньютона, Абрахама де

Муавра на початку XVIII сторіччя. А в 1757 році Італійський математик Вінченцо Ріккаті виконав докладне дослідження гіперболічних функцій, визначив їх та запропонував сучасні позначення для них: sh для гіперболічного синуса та ch для гіперболічного косинуса. Ріккаті вивив ці функції, розглядаючи одиничну гіперболу, використовуючи аналогію з одиничним колом для тригонометричних функцій [12, 13].

Але це все сталося значно пізніше того коли три ведучих математика свого часу німецький математик Готфрід Вільгельм Лейбніц (Gottfried Wilhelm Leibniz), Християн Гюйгенс (Christiaan Huygens) та швейцарський математик Йоганн Бернуллі (Johann Bernoulli) незалежно один від одного, а пізніше спільно, розв'язали розв’язали задачу про визначення форми ланцюгової лінії (гіперболічного косинуса). Справжню форму кривої і її математичне рівняння вдалося встановити в кінці XVII століття завдяки розвитку диференціального та інтегрального числення. У 1691 році Гюйгенс, Лейбніц і Бернуллі публічно оголосили, що ланцюгова лінія — це трансцендентна крива, а не алгебраїчна (як парабола), і вивели її рівняння [14, 15].

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = ach\left(\frac{x}{a}\right),$$

де використана відома математична функція гіперболічний косинус

$$y = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) = ch(x),$$

a – певний параметр, що залежить від довжини ланцюга і відстані між точками підвісу.

Вперше ввів термін «катенарія» (catenaria) Лейбніц. І вже наприкінці XVII сторіччя Иоганн Ламберт незалежно від Ріккаті провів подальше дослідження властивостей цих функцій и встановив їх паралелізм формул звичайної та гіперболічної тригонометрії, що в подальшому, привело до побудови неевклідової геометрії, в якій гіперболічна тригонометрія замінила кругову [16].

Англійський фізик Роберт Гук (Robert Hooke, 1635–1703) відкрив одну дивовижну властивість ланцюгової лінії: у перевернутому вигляді вона є найстійкішою формою для арок, що стоять окремо. Ланцюг, що провисає, знаходиться в положенні, в якому внутрішні сили розтягують його вздовж лінії кривої, тобто дотичні до ланцюга в кожній її точці. У перевернутому вигляді всі ці сили, що розтягують, перетворюються на сили стиснення, роблячи ланцюгову лінію ідеальною аркою, в якій всі сили стиснення теж діють уздовж лінії кривої. В арці, що має форму ланцюгової лінії, немає згинальних сил: вона підтримує себе власною вагою, не потребуючи, взагалі кажучи, ніяких скоб чи опор. Така арка буде дуже стійкою за мінімальної кількості цегляної кладки. Для того щоб арка стояла міцно, цеглини, в принципі, навіть не потрібно скріплювати цементним розчином, оскільки вони притискають одна одну по всій її висоті. Гук був дуже задоволений своїм відкриттям, заявивши, що «*ще жоден архітектор не намагався зробити щось подібне*». Однак невдовзі після цього інженери почали використовувати ланцюгові лінії у роботі. До настання комп'ютерної ери найшвидший спосіб створити їх зводився до того, щоб повісити ланцюг, накреслити криву, побудувати модель із жорсткого матеріалу та поставити її в перевернутому положенні [17].

Досліджуючи властивості катенарії та її зв'язок з іншими кривими Леонард Ейлер (XVIII ст.) встановив, що якщо її обертати навколо осі, вона утворює поверхню, яка називається катеноїд, і це єдина поверхня обертання (крім площини), яка є мінімальною поверхнею (тобто має найменшу площу при заданому контурі) (рис. 2) [18].

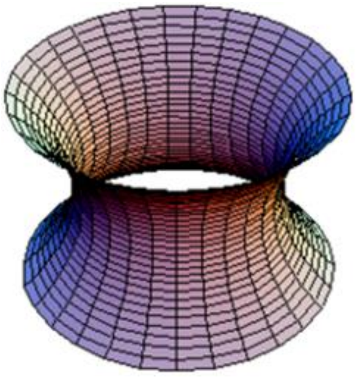

Рис. 2. Поверхня обертання (катеноїд)

Гіперболічні функції і, насамперед гіперболічний косинус (ланцюгова лінія) залишаються і досі активно використовуються у самих різних розділах сучасної математики, фізики, механіки і навігації.

Гіперболічний косинус також використовується в розрахунках різних складних конструкціях, де потребується точне моделювання кривизни, наприклад, в деяких типах дахів або при створенні архітектурних форм, імітуючих природні криві [19].

Багато природних арок [26], сформованих ерозією (наприклад, Rainbow Natural Bridge в Юті, США), мають форму, дуже близьку до катенарії, оскільки матеріал руйнується до моменту досягнення оптимальної форми рівноваги (рис. 3).

Промислові печі, особливо для випалювання цегли або кераміки, часто мають поперечний переріз у формі ланцюгової арки. Ця форма є найбільш стійкою до високих температур та навантаження від матеріалу, що зводиться.

Рис. 3. Природня арка Rainbow Natural Bridge в Юті, США

В архітектурі та техніці для провисаючих та арочних конструкцій замість параболи широко використовується ланцюгова лінія тому, що внутрішні сили тиску в ній ідеально компенсовані. Застосування дискретної моделі катенарії та алгоритм побудови множини точок, що наближено належать ланцюговій лінії, яка задається точками кріплення на різних рівнях, представлено дослідження [20]. Можливість використання статико-геометричного методу проф. Ковальова М.М. для створення дискретних моделей контурів архітектурних об’єктів продемонстрована у роботі [21, 22]. Серед інших застосувань катенарії слід відзначити, її застосування у вуличному будівництві. Повітряні лінії електропостачання, трамвайних чи тролейбусних ліній, телефоні кабелі, або навіть мотузки, провисаючи між двома опорами [25].

Форма ланцюгової арки важлива при проектуванні кабельних систем для підтримки дахів, як-от система сталевих тросів, що підтримує дах Міжнародного аеропорту Денвера (рис. 4).

Рис. 4. Дах міжнародного аеропорту Денвера

Принцип катенарії широко застосовувався при будівництві мостів. Будівництво першого великого ланцюгового мосту через річку Дніпро, спроєктованого та очолюваного британським інженером Чарльзом Віньйолі. розпочалося в 1847 році та діяло з 1853 по 1920 рік (рис. 5). У травні 1925 року на стовпах колишнього Ланцюгового мосту було відкрито новий міст з балковою конструкцією за проектом Є. Патона, який був названий на честь радянської партійної діячки Євгенії Бош (рис. 6) [26].

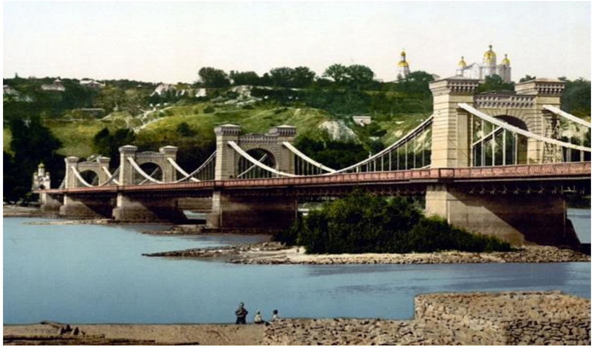
Рис. 5.

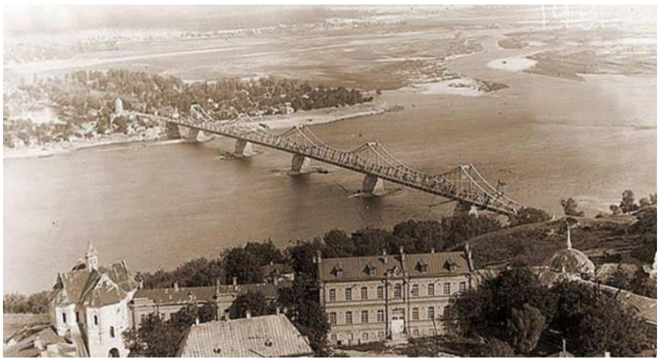
Рис. 6.

Хоча кабель головного прольоту підвісного моста (який підтримує горизонтальне полотно моста) приймає форму, ближчу до параболи (оскільки навантаження рівномірно розподілене по горизонтальній проекції, а не вздовж кабелю), самі троси, що вільно висять або не несуть додаткового навантаження, дійсно утворюють катенарію. Форма провисання несучого троса моста, наприклад кабелі моста, є ланцюговою лінією, яку описує гіперболічний косинус. Ця крива забезпечує рівномірний розподіл ваги мостового полотна та підвісів по всій довжині кабелю, що робить її ідеальною для ефективного та міцного будівництва довгих прольотів. Використовуючи цю формулу архітектори і інженери розраховують навантаження і проєктують міцні естетично привабливі мости. Наприклад міст Золоті ворота (рис. 7).

У стиснутих стрічкових мостах (Stressed ribbon bridges), де полотно мосту слідує за вигнутою вниз катенарією і знаходиться під напругою (стисненням) несуча функція кабелю поєднується з жорсткістю полотна (рис .8).

До рідкісних прикладів арок можна віднести сучасні деякі пішохідні мости або мости невеликих прольотів, які можуть бути спроєктовані як ланцюгові арки для естетики та мінімалістичного використання матеріалів, коли основне навантаження – це власна вага арки [23, 24].

В інженерії залізниць термін «контактна катенарія» використовується для позначення системи підвіски контактного дроту над рейками, що передає електроенергію поїздам. Система складається з несучого троса (який може мати форму катенарії) та контактного дроту. Це забезпечує стабільну і гнучку подачу живлення [27, 28].


Рис. 7.


Рис. 8.

У нафтогазовій промисловості сталеві стоякові труби, підвішені між виробничою платформою та морським дном, приймають форму, близьку до катенарії, і називаються сталеві катенарні стояки (SCR).

Важкі якірні троси або ланцюги, що звисають, утворюють катенарію, що допомагає зменшити кут натягу біля якоря, підвищуючи його ефективність.

Таким чином, катенарія є ключовою кривою в інженерії (звисаюча форма), а перевернута катенарія (ланцюгова арка) – в архітектурі арок та склепінь, забезпечуючи оптимальну ефективність використання матеріалу та конструктивну міцність.

У вуличному будівництві катенарія зустрічається при будівництві фонтанів. Хоча самі фонтани рідко мають величезні прольоти, їхні архітектурні елементи, особливо великі кам'яні або бетонні арки чи склепіння, можуть бути спроєктовані за принципом ланцюгової арки для максимальної міцності та стійкості, щоб витримати вагу матеріалу та води.

Існує дуже цікавий фізичний феномен, який називають «ланцюговий фонтан» (або «фонтан із ланцюга»), і його форма описується оберненою (перевернутою) катенарією. Цей «фонтан» не є фонтаном у традиційному розумінні з водою, а експериментом з фізики:

Це явище, коли довгий ланцюг (наприклад, із кульок) витягують з посудини, що стоїть на висоті. Замість того, щоб просто падати через край, ланцюг піднімається вгору дугою, немов фонтан, перед тим, як впасти на підлогу.

Арка, яку утворює ланцюг у польоті, точно описується оберненою катенарією (кривою, яку утворює провисаючий ланцюг, але перевернутою догори) (рис. 9) [29].

Це протиінтуїтивний ефект, пояснення якого пов'язане з інерцією та тим, як ланки ланцюга, що спочивають у посудині, взаємодіють із ланками, що починають рух.

Рис. 9. Приклад перевернутої катеранії

Хоча це і не архітектурний фонтан, це найвідоміший приклад, де термін "фонтан" пов'язаний із катенарією, і його часто використовують для демонстрації властивостей цієї кривої в динаміці.

Таким чином, гіперболічний косинус — це математичний «шаблон» найефективнішого та найстабільнішого провисання або найміцнішої арки під дією гравітації.

Висновки та перспективи. В статті подано дослідження ланцюгової ліній (катенарії). Проведено її математичний та геометричний опис, Надано її визначення, історія її відкриття, сформовано геометричну модель, виконано аналіз структурних властивостей представлено наочні зображення. Наочними прикладами доведено існування катенарії в природі. Проаналізовано сфери практичного використання у діяльності людини зокрема в машинобудуванні, будівництві та інженерії, підібрані найбільш яскраві та характерні приклади, наведені фотографічні та графічні зображення Зроблено висновок про доцільність геометричних досліджень з метою поширення сфер застосування катенарії.

Література

1. *Heyman J.* The stone skeleton. *International Journal of Solids and Structures*. 1966. Vol. 2, № 2. P. 249–279.
2. *Huxtable A. L.* The unreal America : architecture and illusion. The New Press, 1999. 208 p. ISBN 9781565844278.
3. *Burry M. C. Gaudí.* New Makers of Modern Culture. Vol. 1 / ed. J. Wintle. 2007. P. 595–597. DOI: https://doi.org/10.4324/9780203822999
4. *Billington D. P.* Thin Shell Concrete Structures. *2nd ed. McGraw-Hill,* 1987. 405 p. ISBN 0070052719.

5. *Block P.* Thrust Network Analysis: Exploring Three-Dimensional Equilibrium. *International Journal of Space Structures. 2009. Vol. 24, № 4. P. 275–290.* URL: http://hdl.handle.net/1721.1/49539.
6. *Veenendaal D.* Digital Fabrication. *Dessau International Architecture Graduate School, 2017.* DOI: 10.1007/978-94-007-7137-6.
7. *Mencke O.* Solutions of the problem proposed by J. B. *Acta Eruditorum.* 1691. Jun. P. 273.
8. *Carlson S. C.* Catenary mathematics. *Encyclopedia Britannica*. URL: https://www.britannica.com/science/catenary (дата звернення: 10.05.2025).
9. *Антонюк А. А., Антонюк Н. Г.* Про одну чудову криву. *Країна знань*. 2022. № 1. URL: https://www.krainaz.org/202201/817-curved-line (дата звернення: 04.09.2025).
10. *Lambert J. H.* Observations trigonométriques. *Mem. Acad. Sci. Berlin*. 1770. Bd. 24. P. 327–354.
11. *Bernoulli J.* Analysis problematis antehac propositi, de inventione lineae descensus a corpore gravi percurrendae uniformiter, sic ut temporibus aequalibus aequales altitudines emetiantur: et alterius cujusdam problematis propositio. *Acta Eruditorum*. 1690. May. P. 217–219.
12. *Riccati V.* Opuscula physico-mathematica : ad res physicas & mathematicas pertinentium. Bononiae : Apud Lælium a Vulpe Instituti Scientiarium Typographum, 1757. Vol. 1. 173 p. URL:https://books.google.com.ua/books/about/Opusculorum_ad_res_physicas_et_mathemati.html?id=dn1m0AEACAAJ&redir_esc=y
13. *Bernoulli J.* Solutio problematis funicularii. *Acta Eruditorum*. 1691. Jun. P. 274–276.
14. *Leibniz G. W.* Solutio problematis catenarii. *Acta Eruditorum*. 1691. Jun. P. 277–281.
15. *Getun Galyna, Lesko Vitalii, Bezklubenko Iryna, Balina Olena, Butsenko Yurii.* Stochastic models for ensuring parametric reliability of the construction machines / *Опір матеріалів і теорія споруд,* Київ: КНУБА, 2021, №106, С. 262–273. http://omtc.knuba.edu.ua/article/view/235475.
16. *Lambert J. H.* Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres*. 1761 (publ. 1768). P. 265–322.
17. *Huygens C.* Solutio problematis funicularii. *Acta Eruditorum*. 1691. Jun. P. 281–282.
18. *Euler L.* Introductio in analysin infinitorum. *Lausannae : Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios*, 1748. Vol. 2. 398 p.
19. *Гетун Г.В., Безклубенко І.С., Соломін А.В.* Аналіз та класифікація сучасних конструкцій великопрогонових покриттів будівель / *Сучасні проблеми архітектури та містобудування*. Київ: КНУБА, 2023. № 65. С. 216 – 225. http://archinform.knuba.edu.ua/issue/view/17525.

20. *Мостовенко О.В., Анпілогова В.О.* Дискретна модель ланцюгової лінії. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ : КНУБА, 2016. №92. С.10–14. URL: https://salo.li/3D04E87
21. *Колган А.В.* Дискретна модель арки, форма якої наближена до ланцюгової лінії / *Прикладна геометрія, інженерна графіка та об'єкти інтелектуальної власності*. Київ: КПІ ім. Сікорського, 2024. Том 1. Вип. XIII. С. 100–104. URL:https://jagegip.kpi.ua/article/view/310160
22. *Ботвіновська С.І.,* Моделювання дискретного аналога єдиної гладкої плоскої лінії / *Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. збірник* / Головн. ред. М.М. Осєтрін. Київ, КНУБА, 2019. Вип. 70. – 645 с. С. 86–98.
23. *Гетун Г.В., Безклубенко І.С., Баліна О. І., Буценко Ю. П.* Принципи конструювання та особливості статистичного розрахунку арок / *Spatiol Development.* Київ: КНУБА, 2022 (1). С. 43–56. URL: https://doi.org/10.32347/2786-7269.2022.1.43-55.
24. *Gryhoriy Ivanchenko, Galyna Getun, Andriy Solomin, Iryna Bezklubenko.* Feature of design and calculations of complex reinforced concrete frams of buildings / *Опір матеріалів і теорія споруд,* Київ: КНУБА, 2023. №110. С. 108–117. URL: https://doi.org/10.32347/2410-2547.2023.110.
25. *Honcharenko, T., Tsiutsiura, S., Kyivska, K., Balina, O., Bezklubenko, I.S.* Transform approach for formation of construction project management teams based on building information modeling */ CEUR Workshop Proceeding,* Astana, 2021, 2851, С. 11–21.
URL: https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57223103586&eid=2-s2.0-85104834281.
26. *Galina Getun, Iryna Bezklubenko, Vira Koliakova,Olena Balina.* Індустріальний розвиток Києва у другій половині XIX ст. / *Будівельні конструкції. Теорія і практика*. Київ: КНУБА, 2020. № 6. С. 22 – 33. DOI: https://doi.org/10.32347/2522-4182.6.2020.22-33.
27. *Бідніченко О.Г.* Логарифмічна спіраль як геометрична форма та її природне та практичне застосування / *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ: КНУБА, 2025. № 108. С. 3 – 17.
DOI: https://doi.org/10.32347/0131-579X.2025.108.3-17.
28. *Працьовитий М. В., Гончаренко Я. В*. Лінії на евклідовій площині. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2005. 44 с.
DOI: https://doi.org/10.26642/ten-2025-1(95)-107-117.
29. Катеноїд. *Вікіпедія: вільна енциклопедія*. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Катеноїд (дата звернення: 12.10.2025).

References

1. *Heyman J.* The stone skeleton. *International Journal of Solids and Structures*. 1966. Vol. 2, № 2. P. 249–279.
2. *Huxtable A. L.* The unreal America : architecture and illusion. The New Press, 1999. 208 p. ISBN 9781565844278.

3. *Burry M. C. Gaudí.* New Makers of Modern Culture. Vol. 1 / ed. J. Wintle. 2007. P. 595–597. DOI: https://doi.org/10.4324/9780203822999
4. *Billington D. P.* Thin Shell Concrete Structures. *2nd ed. McGraw-Hill,* 1987. 405 p. ISBN 0070052719.
5. *Block P.* Thrust Network Analysis: Exploring Three-Dimensional Equilibrium. *International Journal of Space Structures. 2009. Vol. 24, № 4. P. 275–290.* URL: http://hdl.handle.net/1721.1/49539.
6. *Veenendaal D.* Digital Fabrication. *Dessau International Architecture Graduate School, 2017.* DOI: 10.1007/978-94-007-7137-6.
7. *Mencke O.* Solutions of the problem proposed by J. B. *Acta Eruditorum.* 1691. Jun. P. 273.
8. *Carlson S. C.* Catenary mathematics. *Encyclopedia Britannica*. URL: https://www.britannica.com/science/catenary (дата звернення: 10.05.2025).
9. Antoniuk, A. A., & Antoniuk, N. H. (2022). Pro odnu chudovu kryvu [About one wonderful curve]. *Kraina znan*, (1). URL: https://www.krainaz.org/202201/817-curved-line
10. *Lambert J. H.* Observations trigonométriques. *Mem. Acad. Sci. Berlin*. 1770. Bd. 24. P. 327–354.
11. *Bernoulli J.* Analysis problematis antehac propositi, de inventione lineae descensus a corpore gravi percurrendae uniformiter, sic ut temporibus aequalibus aequales altitudines emetiantur: et alterius cujusdam problematis propositio. *Acta Eruditorum*. 1690. May. P. 217–219.
12. *Riccati V.* Opuscula physico-mathematica : ad res physicas & mathematicas pertinentium. Bononiae : Apud Lælium a Vulpe Instituti Scientiarium Typographum, 1757. Vol. 1. 173 p. URL:https://books.google.com.ua/books/about/Opusculorum_ad_res_physicas_et_mathemati.html?id=dn1m0AEACAAJ&redir_esc=y
13. *Bernoulli J.* Solutio problematis funicularii. *Acta Eruditorum*. 1691. Jun. P. 274–276.
14. *Leibniz G. W.* Solutio problematis catenarii. *Acta Eruditorum*. 1691. Jun. P. 277–281.
15. *Getun Galyna, Lesko Vitalii, Bezklubenko Iryna, Balina Olena, Butsenko Yurii.* Stochastic models for ensuring parametric reliability of the construction machines / *Опір матеріалів і теорія споруд,* Київ: КНУБА, 2021, №106, С. 262–273. http://omtc.knuba.edu.ua/article/view/235475. {in Ukrainian}
16. *Lambert J. H.* Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres*. 1761 (publ. 1768). P. 265–322.
17. *Huygens C.* Solutio problematis funicularii. *Acta Eruditorum*. 1691. Jun. P. 281–282.
18. *Euler L.* Introductio in analysin infinitorum. *Lausannae : Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios*, 1748. Vol. 2. 398 p.

19. *Hetun, H. V., Bezklubenko, I. S., & Solomin, A. V.* (2023). Analiz ta klasyfikatsiia suchasnykh konstruktsii velykopronohovykh pokryttiv budivel [Analysis and classification of modern designs of long-span coatings of buildings]. *Suchasni problemy arkhitektury ta mistobuduvannia* [Modern Problems of Architecture and Urban Planning], (65), 216–225. http://archinform.knuba.edu.ua/issue/view/17525. {in Ukrainian}
20. *Mostovenko, O. V., & Anpilohova, V. O.* (2016). Dyskretna model lantsiuhovoi linii [Discrete model of a catenary]. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika* [Applied G. eometry and Engineering Graphics], (92), 10–14. https://salo.li/3D04E87. {in Ukrainian}
21. *Kolhan, A. V.* (2024). Dyskretna model arky, forma yakoi nablyzhena do lantsiuhovoi linii [Discrete model of an arch, the shape of which is close to a catenary]. *Prykladna heometriia, inzhenerna hrafika ta obiekty intelektualnoi vlasnosti* [Applied Geometry, Engineering Graphics and Intellectual Property Objects], 1(13), 100–104. https://jagegip.kpi.ua/article/view/310160. {in Ukrainian}
22. *Botvinovska, S. I.* (2019). Modeliuvannia dyskretnoho analoha yedynoi hladkoi ploskoi linii [Modeling a discrete analog of a single smooth flat line]. *Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia* [Urban Planning and Territorial Planning], (70), 86–98. {in Ukrainian}
23. *Hetun, H. V., Bezklubenko, I. S., Balina, O. I., & Butsenko, Yu. P.* (2022). Pryntsypy konstruiuvannia ta osoblyvosti statystychnoho rozrachunku arok [Principles of design and features of statistical calculation of arches]. *Spatial Development*, (1), 43–56. https://doi.org/10.32347/2786-7269.2022.1.43-55. {in Ukrainian}
24. *Ivanchenko, H., Getun, H., Solomin, A., & Bezklubenko, I.* (2023). Features of design and calculations of complex reinforced concrete frames of buildings. *Opir materialiv i teoriia sporud* [Strength of Materials and Theory of Structures], (110), 108–117. https://doi.org/10.32347/2410-2547.2023.110.108-117
25. *Honcharenko, T., Tsiutsiura, S., Kyivska, K., Balina, O., Bezklubenko, I.S.* Transform approach for formation of construction project management teams based on building information modeling */ CEUR Workshop Proceeding,* Astana, 2021, 2851, C. 11–21.
URL: https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57223103586&eid=2-s2.0-85104834281.
26. *Getun, H., Bezklubenko, I., Koliakova, V., & Balina, O.* (2020). Industrialnyi rozvytok Kyieva u druhii polovyni XIX st. [Industrial development of Kyiv in the second half of the 19th century]. *Budivelni konstruktsii. Teoriia i praktyka* [Building Constructions. Theory and Practice], (6), 22–33. https://doi.org/10.32347/2522-4182.6.2020.22-33
27. *Bidnichenko, O. H.* (2025). Loharyfmichna spiral yak heometrychna forma ta yii pryrodne ta praktyчне zastosuvannia [Logarithmic spiral as a

geometric form and its natural and practical application]. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika* [Applied Geometry and Engineering Graphics], (108), 3–17. https://doi.org/10.32347/0131-579X.2025.108.3-17.
28. *Pratsovytyi, M. V., & Honcharenko, Ya. V.* (2005)**.** Linii na evklidovii ploshchyni [Lines on the Euclidean plane]. Kyiv: NPU imeni M. P. Drahomanova. https://doi.org/10.26642/ten-2025-1(95)-107-117.
29. *Katenoid* [Catenoid]. (2025, October 12). In *Wikipedia: The Free Encyclopedia*. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Катеноїд

Cand.Sc. or C.Sc., assoc. Prof. **Iryna Bezklubenko,**
bezklubenko.is@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-9149-4178
Cand.Sc. or C.Sc., prof. **Galyna Getun,**
getun.gv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-3317-3456
Kyiv National University of Construction and Architecture

CATENARY AND ITS PRACTICAL APPLICATION IN CONSTRUCTION

The application of function graphs in architecture is closely related to the use of mathematical curves and surfaces to create both aesthetically pleasing and structurally efficient forms. They are key tools in engineering calculation and modern parametric design. An important place is occupied by algorithmic design, where the shape of an object is determined using a set of rules (algorithm) and mathematical dependencies between parameters. Instead of directly modeling geometry, the designer creates a logical structure that generates it, using mathematical functions (linear, polynomial, trigonometric, logarithmic, etc.) to calculate the values of one parameter based on others. Catenoids and catenary lines (or catenary curves) are important mathematical concepts that find applications, in particular, in architecture and engineering due to their unique properties related to the minimization of energy and stresses. The work is devoted to the analysis of the geometric and mathematical features of the catenoid (catenary line). The theoretical and practical aspects and the natural and practical application of the catenary line in various technical areas of activity are considered. A mathematical description of the catenoid is presented and its geometric and structural properties are investigated, which allow the use of this form in various technical areas, in particular in engineering, bridge construction, and in ancient and modern street architecture. The study noted that the catenary is a key curve in suspension bridge engineering (the overhanging form), and the inverted catenary (the chain arch) is in the architecture of arches and vaults (both in bridges and in elements that may be part of large fountain complexes), ensuring optimal material efficiency and structural strength. A conclusion was made about the possibility of expanding the scope of catenary applications.

Keywords: catenary; catenary line; geometric model; arches; bridge; practical application.