

к. т. н., доцент, **Несвідомін А.В.**,
a.nesvidomin@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-9227-4652>
д. т. н., професор, **Пилипака С.Ф.**,
s.pylypaka@nubip.edu.ua ORCID 0000-0002-1496-4615,
к. т. н, доцент, **Бабка В.М.**,
babkavitaliy@ukr.net, ORCID 0000-0003-4971-4285, д. т. н., проф.
к. т. н, доцент, **Грищенко І.Ю.**,
irgr@yahoo.com, ORCID 0000-0002-1000-9805

Національний університет біоресурсів і природокористування
України

СФЕРИЧНИЙ АНАЛОГ КОНХОЇДИ НІКОМЕДА

Між фігурами на площині і їх сферичними аналогами існує суттєва відмінність. Це можна продемонструвати на властивостях плоских і сферичних трикутників. Якщо для плоских трикутників сума внутрішніх кутів дорівнює 180° , то для сферичних трикутників це правило не діє. Однак за правилами побудови кривих на площині, зв'язаних із вимірюванням відрізків, можна будувати сферичні аналоги, у яких ці відрізки є довжинами дуг великого кола. Якщо ці дуги розташовані на сфері одиничного радіуса, то їх довжини чисельно дорівнюють центральним кутам, сторонами яких є промені, що сполучають центр сфери із кінцями дуг. Наприклад, існує сферичний аналог еліпса, який задається на сфері двома фіксованими точками, сума відстаней від який до еліпса є величиною сталою. Деякі аналоги плоских кривих можна отримати на основі кочення циліндричних поверхонь на площині, що для сферичного аналогу відповідає коченню конусів по своїх розгортках.

Однак, не дивлячись на відмінність фігур на площині і просторових на сфері, у них є певні спільні риси. Як плоскі фігури можуть ковзати всіма своїми точками у площині, так і сферичні фігури можуть аналогічно ковзати по її поверхні. Деякі співвідношення між сторонами і кутами для плоских фігур справедливі і для сферичних. Наприклад, існує сферичний аналог теореми Піфагора, який базується на аналогічних співвідношеннях катетів і гіпотенузи як для плоского, так і для сферичного прямокутного трикутників. Перерізом сфери площиною є коло. Взяти на ньому три точки, можна побудувати сферичний трикутник із вершинами у цих точках. Відповідно, для кожного сферичного трикутника існує коло, яке проходить через його вершини аналогічно для трикутника у площині. Якщо вершини трикутника взяти на великому колі, то на площині це відповідає вершинам на прямій лінії. Це узгоджується із положенням про те, що аналогом прямої лінії на площині є велике коло на сфері.

У статті розглянуто сферичний аналог конхоїди Нікомеда, побудова якої базується на відкладанні відрізків однакової довжини в обидві сторони від прямої, аналогом якої на сфері є велике коло. Ці відрізки відкладаються на променях, які ідуть у точку на заданій відстані від великого кола. Отримано аналітичні залежності, здійснено візуалізацію отриманих результатів.

Ключові слова: конхоїда Нікомеда; сферичний аналог; сферичні трикутники; формули сферичної тригонометрії.

Постановка проблеми. На спільні властивості плоских і сферичних фігур звертали увагу багато вчених, оскільки ці спільні властивості можна використати для конструювання сферичних механізмів, які є аналогами плоских. Найпростіший приклад – циліндрична і конічна зубчасті передачі. Взаємному коченню циліндрів при їх обертанні навколо нерухомих осей відповідає взаємне кочення конусів із спільною вершиною у центрі сфери. Для циліндричної зубчастої передачі профілем зубця є евольвента кола. Для конічної зубчастої передачі профілем зубця є сферична евольвента кола, побудова якої здійснюється за однаковим законом при переході від циліндричної до конічної передачі. Певна подібність між плоскими та сферичними фігурами і їх спільні властивості є підґрунтям для створення сферичних механізмів [1 – 3]. Звідси впливає актуальність досліджень щодо побудови сферичних аналогів плоских кривих.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В праці [4] отримано параметричні рівняння сферичного аналогу циклоїди на основі кочення конуса по нерухомій розгортці. Кочення розгортки по нерухомому конусу розглянуто в праці [5]. В ній показано, що точка на колі, яка обмежує розгортку, описує сферичну евольвенту, яка до того ж є лінією укусу на сфері. Зв'язок між гіперболою і еліпсом на поверхні кулі розглянуто в праці [6]. Показано, що сферичний аналог еліпса подібний до еліпса на площині, а сферичним аналогом гіперболи є два сферичні еліпси, що відповідають двом віткам гіперболи на площині. Формоутворення сферичних епіциклоїд при обкочуванні рухомого конуса по нерухомому розглянуто в праці [7]. В праці [8] показана аналогія між циліндричною передачею з , поперечним перерізом якої є еліпси, і конічною, для якої аксоїдами є конуси з вершинами в центрі сфери і основами у вигляді сферичних еліпсів. Ґрунтовне дослідження сферичної конхоїди Нікомеда здійснено в праці [9], в якій показано, що вітки конхоїди, які на площині прямують до нескінченності, на поверхні сфери є замкненими.

Формулювання цілей та завдання статті. Розробити аналітичний спосіб побудови сферичного аналогу конхоїди Нікомеда.

Основна частина. Утворення конхоїди Нікомеда зв'язане із вимірюванням довжин відрізків на площині. Якщо через точку, яка знаходиться на заданій відстані від прямої, провести пучок променів, то

вони перетнуть пряму під різними кутами. Відклавши на кожному промені відрізок сталої кривини від прямої в обидві сторони, отримаємо геометричне місце їх кінців по різних сторонах від цієї прямої. Отримані точки належать віткам конхоїди Нікомеда. Прототипом прямих на сфері є дуги великих кіл (кіл, центри яких збігаються із центром сфери). Їх довжини вимірюються кутами на сфері одиничного радіуса. За аналог прямої візьмемо на сфері екватор, а променями – великі кола, які проходять через точку A (рис. 1, a). Через неї проведено два промені під кутом ψ до нульового меридіана по обидві сторони від нього. Вони перетинають екватор в точках, симетричних по відношенні до нульового меридіана. Від точки перетину C на промені в обидві сторони відкладено відрізок довжиною l (на рис. 1, a позначено двома рисками). Кінці цих відрізків (точки D і E) належать віткам конхоїди k_1 і k_2 відповідно. Задача полягає у знаходженні положення цих точок на поверхні одиничної сфери в залежності від кута ψ , якого ми будемо вважати незалежною змінною. При цьому заданими величинами є кути ε_0 і кут, що відповідає відстані l .

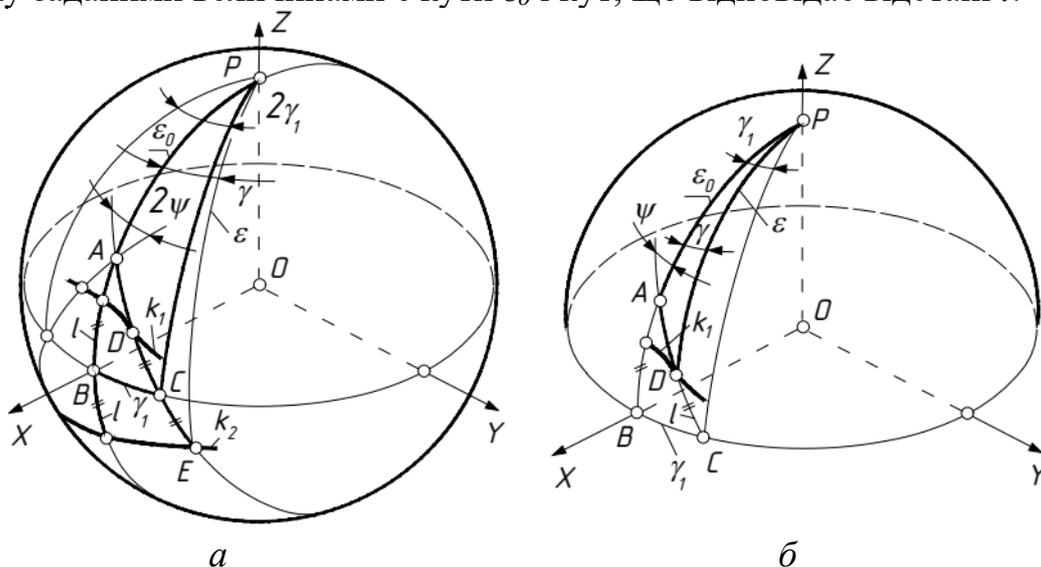


Рис. 1. Побудова сферичного аналогу конхоїди Нікомеда:
 а) двох віток конхоїди;
 б) вітки конхоїди у верхній частині сфери

Параметричні рівняння сфери одиничного радіуса мають вигляд:

$$X = R \sin \varepsilon \cos \gamma; \quad Y = R \sin \varepsilon \sin \gamma; \quad Z = R \cos \varepsilon, \quad (1)$$

де ε , γ – криволінійні координати, якими є кути, що задають величину меридіана і паралелі відповідно. Нам потрібно знайти внутрішнє рівняння сферичної конхоїди Нікомеда у вигляді залежностей $\varepsilon = \varepsilon(\psi)$ і $\gamma = \gamma(\psi)$. Ці залежності будемо розшукувати за допомогою формул співвідношення між кутами і сторонами сферичних прямокутних і косокутних трикутників. Розглянемо, наприклад, прямокутний сферичний трикутник ABC , у якого вершина B є прямим кутом. Сторона $AB = 90^\circ - \varepsilon_0$, де ε_0 – координата (кут)

точки A , відлік якої починається від полюса P . Вершина A дорівнює куту ψ . За цими даними знаходимо сторону BC , яку позначено через кут γ_1 :

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \sin(90^\circ - \varepsilon_0) \operatorname{tg} \psi, \quad \text{звідки} \quad \gamma_1 = \operatorname{arctg}(\cos \varepsilon_0 \operatorname{tg} \psi). \quad (2)$$

Наступний крок – знаходимо гіпотенузу AC цього трикутника:

$$\cos AC = \cos(90^\circ - \varepsilon_0) \cos \gamma_1, \quad \text{звідки} \quad AC = \operatorname{arccos}(\sin \varepsilon_0 \cos \gamma_1). \quad (3)$$

Тепер розглянемо косокутний трикутник PAD (рис. 1, б). Його сторона PD є розшукуваною координатою ε точки D , тобто поточної точки вітки конхкоїди. Її знаходимо за двома відомими сторонами $PA = \varepsilon_0$, $AD = AC - l$ і відомого кута між ними $A = 180^\circ - \psi$:

$$PD = \varepsilon = \operatorname{arccos}[\cos \varepsilon_0 \cos(AC - l) - \sin \varepsilon_0 \sin(AC - l) \cos \psi]. \quad (4)$$

Після цього за теоремою синусів можна знайти кут між сторонами PA і PD , який є другою криволінійною координатою γ точки D , тобто поточної точки конхкоїди:

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin(180^\circ - \psi)} = \frac{\sin(AC - l)}{\sin \gamma}, \quad \text{звідки} \quad \gamma = \operatorname{arcsin}\left(\frac{\sin(AC - l) \sin \psi}{\sin \varepsilon}\right). \quad (5)$$

Отримані вирази (4) і (5) є внутрішніми рівняннями вітки сферичної конхкоїди Нікомеда k_1 , яка розташована у верхній півкулі. Для її побудови потрібно підставити ці вирази у параметричні рівняння (1).

Розглянемо побудову другої вітки k_2 , яка розташована у нижній півкулі. Для цього потрібно знайти криволінійні координати точки E (рис. 1, а), яка належить цій вітці. Для цього розглянемо косокутний трикутник PAE . Як і у попередньому випадку, відомими є дві сторони і кут між ними: сторона $PA = \varepsilon_0$, сторона $AE = AC + l$, кут $A = 180^\circ - \psi$. Дугу PE , тобто криволінійну координату ε точки E знаходимо аналогічно, як і в косокутному трикутнику PAD :

$$PE = \varepsilon = \operatorname{arccos}[\cos \varepsilon_0 \cos(AC + l) - \sin \varepsilon_0 \sin(AC + l) \cos \psi]. \quad (6)$$

Неважко замітити, що вирази (4) і (6) відрізняються тільки знаком перед символом l . Це і зрозуміло, оскільки в косокутних трикутниках PAD і PAE змінюється одна і та ж сторона: в одному випадку вона зменшується на l , в іншому – збільшується на l . Тобто координата ε розшукується за однією і тією ж формулою, тільки в одному випадку (для вітки у верхній півкулі) значення l має бути від'ємне, а для другої (у нижній частині півкулі) –

додатне. З цієї ж причини і друга криволінійна координата γ знаходиться за формулою (5) при зміні знаку перед l на протилежний. Кути ε і γ для поточної точки E нижньої вітки конхоїди позначено на рис. 1, *а*, а для поточної точки D для нижньої точки – на рис. 1, *б*

За знайденими внутрішніми рівняннями (5), (6), після їх підстановки у (1) на рис. 2 побудовані сферичні аналоги конхоїди Нікомедя при різних значеннях сталої l . При $l=0$ дві вітки збігаються на екваторі. При від'ємних значеннях l отримано вітки конхоїди у верхній півкулі, а при додатних – у нижній. В залежності від співвідношення між ε_0 і l верхня вітка може мати точку звороту (рис. 2, *а*) або петлю (рис. 2, *б*).

Можна також побудувати дуги l в одну і протилежну сторону від екватора, кінці яких знаходяться на вітках конхоїди. Для цього потрібно використати залежності (4) і (5). До них входить як дуга l , так і кут ψ . При побудові віток конхоїди ці залежності були функціями кута ψ , тобто $\varepsilon=\varepsilon(\psi)$, $\gamma=\gamma(\psi)$. Для побудови дуг l кут ψ приймаємо за сталу величину, а дугу l – за змінну. Таким чином, внутрішні залежності (4) і (5) можна записати у наступному вигляді: $\varepsilon=\varepsilon(l)$, $\gamma=\gamma(l)$.

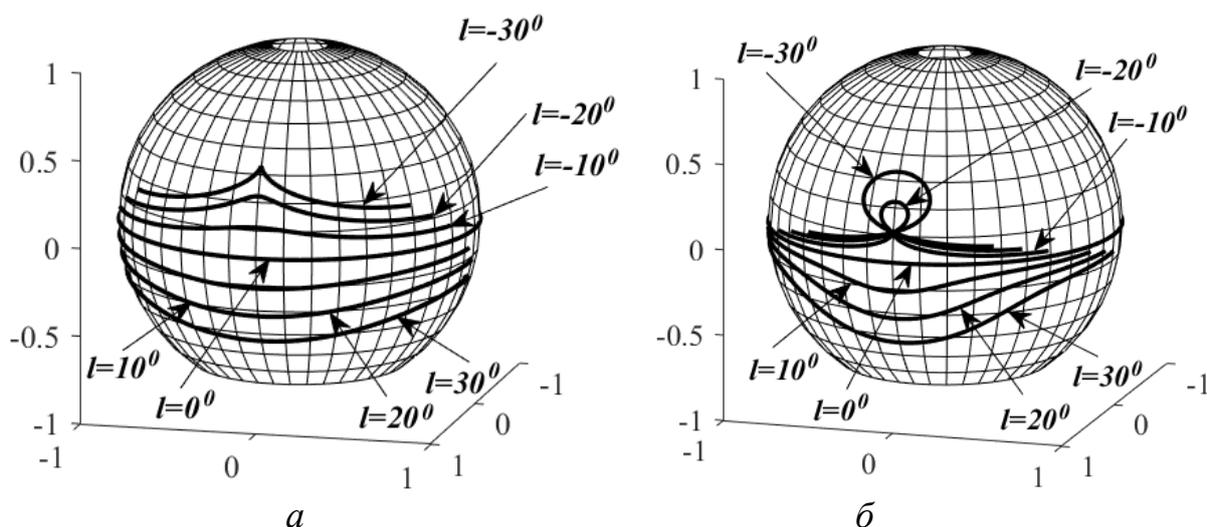


Рис. 2. Сферичні аналоги конхоїди Нікомедя:
а) кут $\varepsilon_0=60^\circ$ і різні відстані l у кутовому вимірі;
б) кут $\varepsilon_0=80^\circ$ і різні відстані l у кутовому вимірі

На рис. 3 побудовано три випадки віток конхоїди Нікомедя із сферичними відрізками, що сполучають відповідні точки віток: без особливих точок (рис. 3, *а*), із точкою звороту (рис. 3, *б*) і із петлею (рис. 3, *в*). Відрізки побудовані через 5° повороту кута ψ .

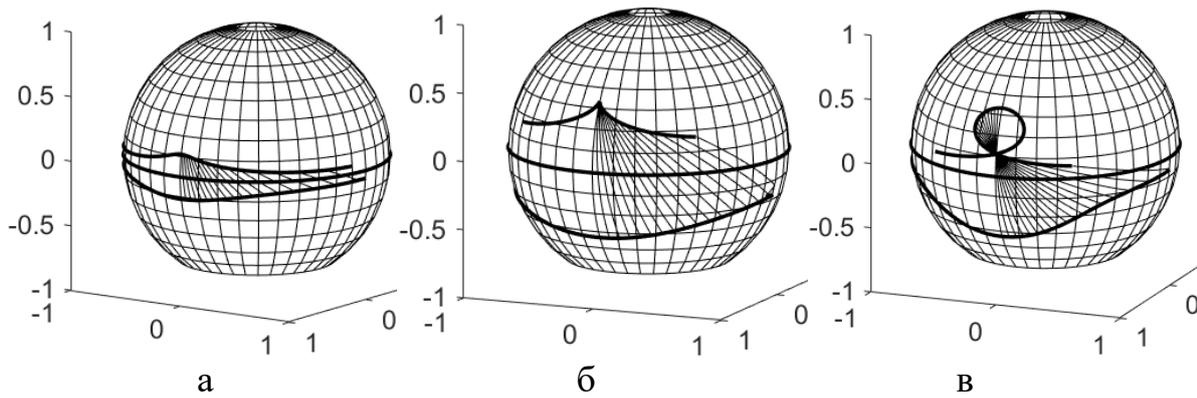


Рис. 3. Випадки сферичної конхоїди Нікомеда з відрізками l рівної довжини:
 а) кут $\varepsilon_0=70^\circ$, $l=10$; б) кут $\varepsilon_0=60^\circ$, $l=30$; в) кут $\varepsilon_0=80^\circ$, $l=30$

Якщо точку A , через яку проходять всі промені, сумістити із полюсом P , тобто при $\varepsilon_0=0$, то вітки будуть конгруентними колами, розташування яких на сфері залежить від відстані l . Якщо $l=90^\circ$, то вітки вироджуються у точки – протилежні полюси сфери. Очевидно, що конхоїди Нікомеда на площині такій ситуації відповідає випадок, коли точка віддалена в нескінченність і промені стають паралельними.

Висновки. Для побудови конхоїди Нікомеда на площині потрібно задати пряму, точку на заданій відстані від прямої, через яку проходять промені, і довжину відрізка. Він відкладається по обидві сторони від прямої вздовж променів і його кінці належать віткам конхоїди. Для сферичного аналогу конхоїди прообразом прямої служить велике коло, а відрізок задається в кутовому вимірі. Побудова здійснюється аналогічним чином із застосуванням формул сферичної тригонометрії. Спочатку знаходиться внутрішнє рівняння конхоїди, як залежність криволінійних координат γ і ε сфери від кута повороту ψ сферичного променя. При підстановці цих залежностей у параметричні рівняння сфери отримуємо рівняння конхоїди на її поверхні. За отриманими рівняннями побудовано три випадки сферичної конхоїди Нікомеда, які відповідають відомим випадкам на площині: без особливих точок, із точкою звороту, із точкою самоперетину. Отримані результати можуть бути використані для побудови аналітичних моделей сферичних механізмів.

Література

1. Bai S., Li X., Angeles J. Огляд методів генерування сферичного руху із застосуванням сферичних паралельних маніпуляторів або сферичних двигунів. *Mechanism and Machine Theory*. – 2019. – Т. 140. С. 377–388. DOI: 10.1016 / j.mechmachtheory.2019.04.016. Режим доступу: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0094114X19301223>.
2. Gopal B. L. S., Singla R. Design and analysis of a spherical joint mechanism for robotic manipulators. *Advances in Engineering Design*. Singapore : Springer, 2023. С. 93–101. DOI: 10.1007/978-981-99-3033-3_10.

3. Косіюк М. М., Кравчук В. С. Кінематичний аналіз сферичного кривошипно-повзунного механізму. *Вісник Хмельницького національного університету*. 2019. № 6 (279). С. 7–11. URL: <http://journals.khnu.km.ua/vestnik/?p=1929>.
4. Несвідомін А. В., Пилипака С. Ф., Бабка В. М., Грищенко І. Ю. Сферичний аналог циклоїди. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ : КНУБА, 2024. Т. 1, Вип. 106. С. 192–200. URL: <http://ageg.knuba.edu.ua/article/view/307906>.
5. Constructing geometrical models of spherical analogs of the involute of a circle and cycloid / A. Nesvidomin et al. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2023. Т. 4, № 7 (124). С. 6–12. URL: <https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85171295214>.
6. Несвідомін А. В., Пилипака С. Ф., Воліна Т. М., Бабка В. М., Грищенко І. Ю. Зв'язок між гіперболою і еліпсом на поверхні кулі. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2024. № 1 (85). С. 84–91. URL: https://journals.kntu.kherson.ua/index.php/visnyk_kntu/article/view/570.
7. Несвідомін А. В., Пилипака С. Ф. Формоутворення сферичних епіциклоїд при обкочуванні рухомого конуса по нерухомому. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2023. № 2 (85). С. 65–70.
URL: https://journals.kntu.kherson.ua/index.php/visnyk_kntu/article/view/243.
8. Construction of conical axoids on the basis of congruent spherical ellipses / Kresan, T., Pylypaka, S., Ruzhylo, Z., Rogovskii, I., Trokhaniak, O. *Archives of Materials Science and Engineering*. 2022, 113(1), С. 13–18. URL: <https://www.sciencegate.app/document/10.5604/01.3001.0015.6967>
9. Boris Odehnal. *ResearchGate*. 2014. URL: <https://www.researchgate.net/publication/265766622>

PhD, assistant professor **Andrii Nesvidomin**,
a.nesvidomin@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-9227-4652>

Ph. D., prof **Serhiy Pylypaka**,
s.pylypaka@nubip.edu.ua ORCID 0000-0002-1496-4615

Ph.D., assoc. prof. **Iryna Hryshchenko**,
irgr@yahoo.com, ORCID: 0000-0002-1000-9805

PhD, assistant professor **Vitaly Babka**
babkavitaliy@ukr.net, ORCID: 0000-0003-4971-4285

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

SPHERICAL ANALOGUE OF NICOMEDES' CONCHOID

There exists a fundamental difference between planar figures and their spherical analogues. This can be demonstrated through the properties of plane and spherical triangles. For plane triangles, the sum of the internal angles equals 180° , while for spherical triangles this rule does not hold. However, following the same geometric construction principles used for planar curves—those based on the measurement of line segments—it is possible to create spherical analogues in which these segments correspond to the lengths of arcs of great circles. If such arcs are situated on a unit sphere, their lengths are numerically equal to the central angles subtended by radii connecting the sphere's center to the arc endpoints. For example, a spherical analogue of the ellipse can be defined on the sphere by two fixed points such that the sum of the spherical distances from these points to any point on the curve is constant.

Despite the differences between planar and spherical figures, they share several common properties. Just as plane figures can slide along the plane in all their points, spherical figures can similarly glide over the surface of the sphere. Some relationships between sides and angles that hold for plane figures are also valid for spherical ones. For instance, there exists a spherical analogue of the Pythagorean theorem, based on analogous relations between the legs and hypotenuse of a right triangle—both in the plane and on the sphere. The intersection of a sphere by a plane is a circle. Selecting three points on it, one can construct a spherical triangle with vertices at those points. Accordingly, for every spherical triangle there exists a circle passing through its vertices, just as for a planar triangle. If the triangle's vertices lie on a great circle, this corresponds in the plane to vertices lying on a straight line, confirming that the spherical analogue of a straight line is a great circle.

This paper considers the spherical analogue of Nicomedes' conchoid. Its construction is based on laying off arcs of equal angular length in both directions from a great circle—the spherical counterpart of a straight line. These arcs are measured along great circles passing through a point located at a specified angular distance from the great circle. Analytical relationships describing this curve have been derived, and visualization of the obtained results has been performed.

Keywords: Nicomedes' conchoid; spherical analogue; spherical triangles; spherical trigonometry formulas.