УДК 514:612.76
DOI: 10.32347/0131-579x.2025.109.150-167

Аспірант, викладач кафедри терапії та реабілітації, **Кучерява О.В.**
kutcheriava.olha@gmail.com, ORCID: 0009-0003-3260-2903
Національний університет фізичного виховання та спорту України
Д. т. н., професор **Скочко В. І.,**
volodymyr.work.pro@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1709-2621
Київський національний університет будівництва і архітектури
Асистент, **Свірідонов В.Г.,**
spiridonov.vh@knuba.edu.ua, ORCID: 0009-0003-4318-1833
Київський національний університет будівництва і архітектури

ГЕОМЕТРИЧНІ ОСНОВИ ПОБУДОВИ МОДЕЛІ ОПОРНО-РУХОВОГО АПАРАТУ ЛЮДИНИ НА ОСНОВІ УЯВЛЕННЯ ПРО РОБОТУ БІОТЕНСЕГРІТІ

Актуальність досліджень, присвячених геометричному моделюванню опорно-рухового апарату людини, зумовлена необхідністю формалізованого опису його просторової структури та механічної поведінки з метою подальшого використання у біомеханіці, фізичній терапії та інженерних застосуваннях. Складність анатомічної будови кістково-м’язової системи та взаємодії її елементів потребує використання узагальнених моделей, здатних відобразити основні закономірності передавання навантажень без надмірного ускладнення математичного апарату.

У роботі розглянуто геометричні основи інтерпретаційного моделювання опорно-рухового апарату людини на базі концепції біотенсегріті. Запропоновано підхід до подання елементів кістково-м’язової системи у вигляді дискретних стрижневих моделей з шарнірними з’єднаннями, що дозволяє зосередити аналіз на осьових зусиллях та забезпечити геометричну незмінюваність конструкцій. Розглянуто умови статичної визначуваності таких систем та особливості їх геометричної інтерпретації у площинному та просторовому випадках.

Виконано аналіз взаємозв’язку між кількістю вузлів і стрижнів у моделях, що забезпечують механічну стабільність та можливість адекватного відтворення передачі навантажень у межах пружної деформації. Показано, що використання методів прикладної геометрії та будівельної механіки дозволяє сформувати узагальнену модель опорно-рухового апарату як геометрично інваріантної системи, придатної для подальших чисельних і прикладних досліджень.

Отримані результати формують геометричне та інженерне підґрунтя для розроблення уточнених біотенсегріті-моделей елементів опорно-рухового апарату людини та забезпечують можливість кількісного *аналізу навантажень у його структурних компонентах. Інтерпретація результатів такого аналізу дає змогу визначити базові принципи використання даних моделювання при формуванні реабілітаційних методик і засобів фізичної терапії.*

Ключові слова: біотенсегріті, інтерпретаційна фізико-математична модель, опорно-руховий апарат людини, надмірна маса, ожиріння, фізична терапія.

Вступ. Надмірна маса тіла та пов’язані з нею порушення функціонування опорно-рухового апарату є поширеним явищем у сучасному суспільстві та призводять до зростання механічних навантажень на суглобові структури, зокрема колінні суглоби. Тривале перенавантаження викликає зміну внутрішнього розподілу зусиль у кістково-м’язовій системі, що обумовлює необхідність розроблення адекватних моделей для аналізу напружено-деформованого стану її елементів.

У межах теоретичної механіки та прикладної геометрії широко застосовуються інтерпретаційні моделі зрівноважених статичних і динамічних сітчастих структур, до яких належать і біотенсегріті-моделі. Такі моделі дозволяють подати складні біомеханічні об’єкти у вигляді дискретних стрижневих систем із шарнірними з’єднаннями, що істотно спрощує аналіз внутрішніх зусиль у вузлах і ланках конструкцій. Саме на основі механічних та чисельних методів аналізу таких моделей формуються сучасні підходи до проєктування й прототипування елементів штучних кісток і суглобів [1, 2].

Інтерпретаційне дискретне моделювання дає змогу визначати опорні реакції модельованих систем та досліджувати можливості їх перерозподілу з метою зменшення локальних перевантажень окремих елементів конструкції [1, 3, 4]. Застосування концепції біотенсегріті у поєднанні з методами прикладної геометрії та будівельної механіки створює підґрунтя для формування геометрично інваріантних моделей опорно-рухового апарату.

Мета і методи дослідження. Метою дослідження є розроблення геометричних основ інтерпретаційного моделювання елементів опорно-рухового апарату людини на базі концепції біотенсегріті з метою формалізованого опису передачі механічних навантажень у кістково-м’язовій системі. Основна увага зосереджена на побудові геометрично інваріантних стрижневих моделей, здатних адекватно відтворювати механічну поведінку кісткових структур у межах пружної деформації.

Для досягнення поставленої мети застосовано методи прикладної дискретної геометрії, теоретичної та будівельної механіки, а також елементи кінематичного аналізу стрижневих систем. У роботі використано інтерпретаційний підхід, за яким суцільні просторові тіла зі складною геометричною формою замінюються еквівалентними шарнірно-стрижневими моделями. Аналіз геометричної незмінюваності моделей виконано шляхом дослідження взаємозв'язку між кількістю вузлів і стрижнів у площинних та просторових системах.

Запропонований підхід дозволяє формалізувати процес побудови біотенсегріті-моделей кісток і фрагментів опорно-рухового апарату та створює основу для подальшого чисельного аналізу напружено-деформованого стану й прикладних біомеханічних досліджень.

Виклад основного матеріалу. Поняття тенсегріті має декілька визначень, у працях Р. Б. Фуллера, К. Снельсона та їх послідовників [5 – 8]. Однак, якщо розглядати моделі тенсегріті з точки зору теоретичної механіки, то вони являтимуть собою деякі сітчасті (або каркасні) системи стискання-розтягу, утворені прямолінійними у своєму робочому положенні елементами (ланками або стрижнями). У канонічному уявленні про тенсергіті, що використовується при їх побудові на засадах будівельної механіки (тобто, у галузі будівництва і архітектури), вони мають складатися з систем жорстких стрижнів та тросів, у яких стрижні працюють виключно на стискання, а троси – виключно на розтягування. При цьому, очевидно, усі вузлові з'єднання при цьому розглядаються як шарнірні, що відповідає класичним припущенням будівельної механіки [1, 3]. Однак, варто зазначити, що це не зовсім коректне визначення, оскільки якщо троси дійсно не можуть працювати ніяк інакше, окрім як на розтяг, то жорсткі стрижні (наприклад, металеві профілі, такі як труби, кутики, швелери тощо) можуть працювати як на стиск, так і на розтяг.

Американський архітектор, інженер-винахідник та філософ-футурист Річард Бакмінстер Фуллер описує системи тенсегріті як «острівці стиснення в океані напруги»; саме так його було процитовано у «Міжнародному журналі космічних структур» (спеціальний випуск 1996 року) [6]. Фуллеру ми завдячуємо саме концепцією тенсегріті. Натомість, на думку Рене Мотро [8], застосування цієї концепції по відношенню до будівельних конструкцій у їх сучасному уявленні з точки зору механіки, тобто таких, які містять лише стрижні та троси, є результатом роботи саме Кеннета Снельсона. В будь-якому випадку, слово тенсегріті (англ: "tensegrity") – це результат сполучення слів «напруженість» (англ.: "tensional") та «цілісність» (англ.: "integrity"). Кілька прикладів просторових тенсегріті конструкцій Снельсона продемонстровано на рисунку 1 [5, 6].

Саме тому, ми опиратимемось у подальшій побудові наших міркувань не на визначенні того, чим має бути тенсегріті, а на те, за яких умов ця структура утворюється й може існувати, згідно з А. П'ю [7], а саме: «Системи тенсегріті можуть вважатися встановленими у робоче положення та зрівноваженими, коли набір компонентів безперервного стиснення (тобто, такі, які постійно працюють на стиск) взаємодіє із компонентами безперервного розтягнення (тобто, такими, які постійно працюють на розтяг), займаючи стабільний об'єм у просторі».

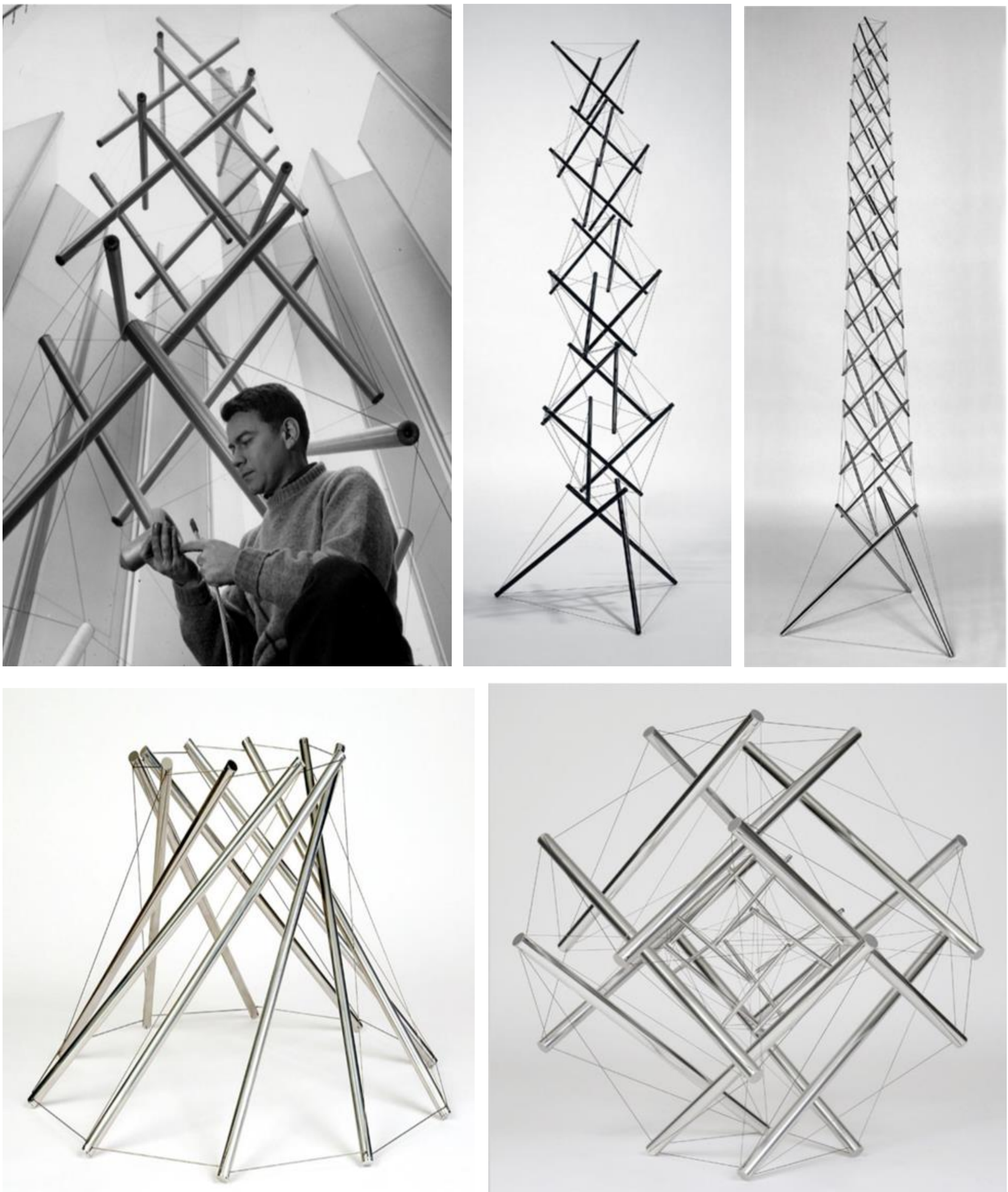


Рис. 1. Просторові тенсегріті конструкції Кеннета Снельсона

У межах концепції біотенсегріті опорно-руховий апарат людини інтерпретується як ієрархічна механічна система, у якій кісткові елементи працюють переважно на стиск, а м'язи, зв'язки та сухожилля – на розтяг[10].

Ортопед Стівен Леві одним із перших запропонував застосування принципів тенсегріті для опису опорно-рухового апарату людини, розглядаючи його як цілісну ієрархічну систему [10]. Такий підхід дозволяє аналізувати передачу навантажень через кістково-м'язові структури та пояснювати роль м'язів у забезпеченні рівноваги і стабільності тіла [10, 11].

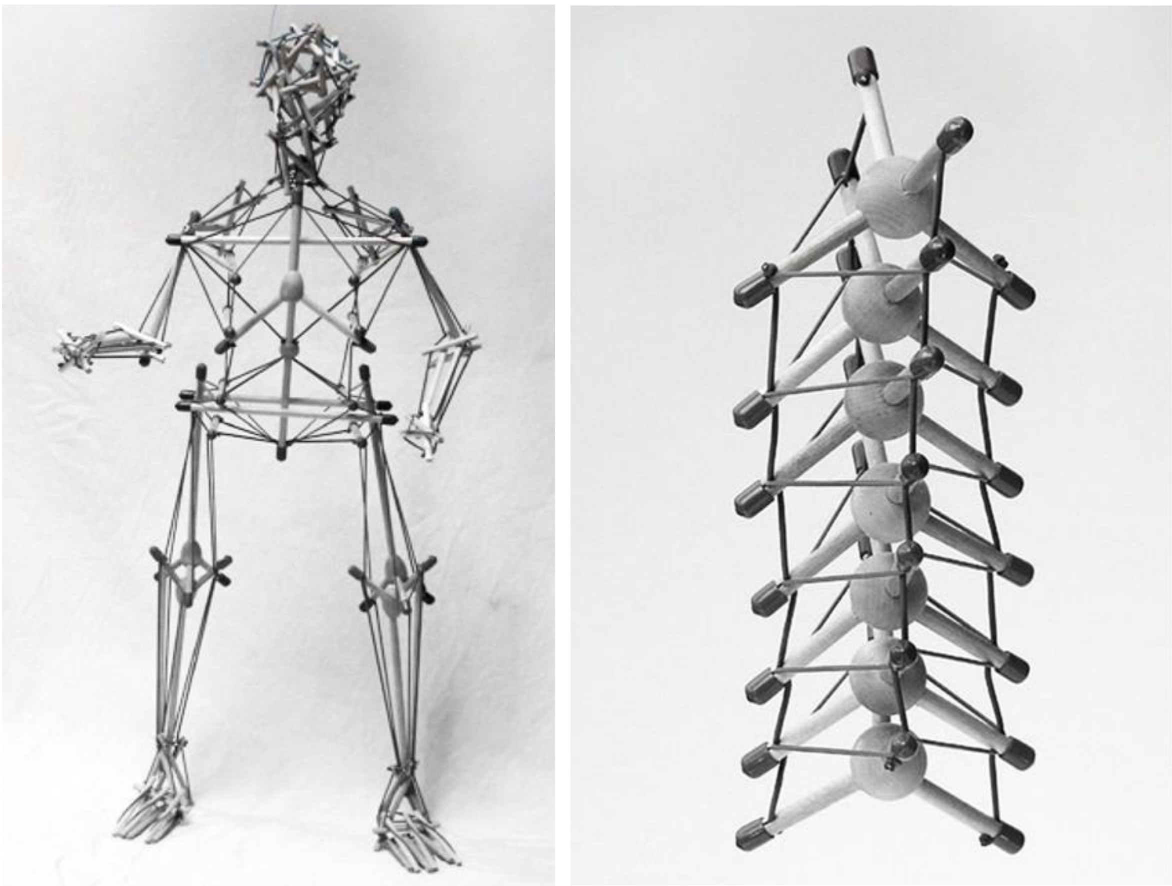


Рис. 2. Модель біотенсегріті, запропонована Стівеном Леві

Таким чином, біотенсегріті модель при ретельному дослідженні та доопрацюванні може стати основою для продовження у достатній мірі точного моделювання особливостей роботи опорно-рухового апарату людини.

На жаль, на сьогоднішній день, математичний апарат, який би описував роботу біотенсегріті практично відсутній, оскільки наявні дослідження описують переважно результати практичних експериментів по створенню відповідних сітчастих аналогів окремих частин опорно-рухового апарату людського тіла. Ці сітчасті (а точніше сказати, стрижнево-тросові) аналоги, тобто, біотенсегріті, лише наближено інтерпретують реальну роботу опорно-рухового апарату, оскільки вони є максимально спрощеними та включають мінімально необхідну кількість стрижнів та тросів. Для скорочення далі по тексту ми інколи використовуватимемо замість слів «стрижень» та «трос» термін – «ланка» з уточненням (при потребі), як саме працює та чи інша ланка (на стиск – для стрижнів; на розтяг – для тросів). Однак, водночас, у частині, де будуть роздягатися механіко-математичні аспекти геометричної незмінюваності окремих елементів моделі, ми оперуватимемо термінами стрижень та трос для того, щоб зберегти автентичність термінологічного апарату і зробити викладений матеріал доступнішим також для фахівці фізико-математичного та інженерного напрямків підготовки.

Важливо розуміти, що, на відміну від м'язів, кістки, хоч і не мають можливості скорочуватися й спричиняти виникнення внутрішніх зусиль, проте повинні витримувати не лише вагу тіла та усі динамічні навантаження, які виникають внаслідок рухів людини, але також і додаткові (а інколи навіть надлишкові) зусилля, викликані скороченням самих м'язів. Саме тому кістки мають досить різноманітну та з інженерної точки зору винахідливу форму. В дійсності, через складну геометричну форму та фізичну неоднорідність кісток, вони працюють не лише на стиск, але й інколи на розтяг, згин, кручення та на супротив поперечним зусиллям, хоч у переважній більшості випадків такий характер роботи є протиприродним. Це свідчить про те, що стрижневі механічні аналоги кісток повинні бути стійкими до практично будь-яких видів впливів.

Для того, щоб пояснити принцип інтерпретування кісток, як просторових твердих тіл, деяким набором стрижнів, розглянемо основи кінематичного аналізу механічних систем [1, 3]. Зокрема, звернемося до основ кінематичного аналізу сітчастих структур (а саме: стрижневих систем), вважаючи об'єкти дослідження такими, які містять лише стрижні, оскільки кістки мають зберігати свою форму, незалежно від характеру зусиль, які у них виникають.

Стрижневими системами за визначенням вважаються такі механічні системи, які складаються із окремих, як правило прямолінійних, стрижнів, з'єднаних між собою у вузлах за допомогою різних видів сполучень або кріплень. Найбільш поширеними типами з'єднання (сполучення) є жорсткі з'єднання та шарніри. Якщо з'єднання стрижнів є жорсткими, то процес визначення усіх компонентів напружено-деформованого стану (НДС) такої системи є дуже складним, так якоскільки у такому разі, як правило система є статично невизначуваною, а процес моделювання вимагає застосування методів чисельного моделювання [2, 11]. Якщо ж застосовуються тільки шарнірні з'єднання, то розрахунок компонентів НДС у значній мірі спрощується, так як при цьому можуть бути застосовані лише рівняння статичної рівноваги. Це призводить до того, що у більшості задач механіки, навіть якщо вузли фактично є жорсткими, їх, тим не менш, замінюють (або точніше сказати інтерпретують) шарнірними. Подібна заміна, окрім іншого, допустима ще й тому, що при умові прикладання зосереджених навантажень саме у місцях вузлових сполучень стрижнів, зусилля, які виникають у шарнірних механічних системах, не значною мірою відрізняються від зусиль у системах із жорсткими вузлами та аналогічною топологію (особливо у випадках, коли усі стрижні мають достатньо велику довжину, що у свою чергу призводить до їх підвищеної гнучкості).

Відтак, при побудові сітчастих шарнірно сполучених моделей кісток, як на площині, так і у просторі, необхідно дотримуватися принципів забезпечення геометричної незмінюваності відповідних моделей під впливом зовнішніх сил, прикладених до вузлів системи, за умови, що внутрішні зусилля, які виникатимуть при цьому в стрижнях, не призводитимуть до втрати їх стійкості, зумовлюючи їх роботу лише у межах пружних деформацій (в рамках дії закону Гука [2]).

Проілюструємо процес інтерпретування кісток зі складною криволінійною геометричною формою за допомогою прямолінійних стрижнів, спираючись на засади класичної механіки.

Почнемо з двовимірної інтерпретації. Зобразимо в площині суцільне жорстке тіло на двох опорах у формі трикутника *A'B'C'* (див. рисунок 3.а.), у околі вершин *B'* якого діє деяке зусилля $\bar{\mathfrak{I}}$, що не спричиняє його пластичних (тобто таких, які можуть зберігатися після припинення дії даної сили) деформацій. Ліва і права опори називаються відповідно – шарнірно-нерухома та шарнірно-рухома (ковзаюча). Утворимо концентричний отвір *A''B''C''* у середині трикутника, що повторюватиме форму самого трикутника таким чином, щоб кожна грань такого отвору була паралельна зовнішнім граням трикутного тіла (див. рисунок 3.б.).

Вважатимемо, що товщини граней утвореного тіла підібрані такими чином, щоб продовжувати забезпечувати стійкість даного тіла (конструкції) у межах пружних деформацій, незважаючи на послаблення отвором. Умовно замінимо грані утвореного тіла на стрижні із жорстким сполученням їхніх вершин, нехтуючи при цьому товщинами граней і зображуючи їх у вигляді простих прямолінійних відрізків для схематичного спрощення вихідного тіла, як механічної системи *ABC* (див. рисунок 3.в.); водночас, замінимо зображення шарнірних опор на еквівалентні з точки зору механіки комбінації стрижнів *AD* і *AE* (замість лівої нерухомої опори), а також *CF* (замість правої рухомої опори). Тепер, слідуючи принципу вище описаної заміни жорстких вузлових сполучень на шарніри, перетворимо механічну модель тіла на стрижневу безмоментну систему (див. рисунок 3.г.). Вочевидь, зовнішнє зусилля $\bar{\mathfrak{I}}$, діюче тепер безпосередньо на вузол *B* (а не в околі вершини *B'* початково заданого тіла *A'B'C'*), не змінюватиме геометричної форми механічної системи *ABC*. Система *ABC*, якщо не враховувати опорні стрижні *AD*, *AE* і *CF*, складатиметься з трьох основних стрижнів *AB*, *BC* і *AC*, залишаючись геометрично незмінюваною під дію сторонніх вузлових навантажень.

Якщо ж за аналогічним принципом спробувати перетворити чотирикутне тіло *A'B'C'D'* на шарнірну стрижневу механічну систему *A* а прикласти зовнішнє зусилля $\bar{\mathfrak{I}}$ до шарніра *B* (так само, як і до вузла *C*), то система виявиться геометрично змінюваною, тобто такою, яка може змінювати свою форму без деформації її елементів.

Водночас, як було з'ясовано вище, трикутна стрижнева система є геометрично незмінюваною. Це означає, що для перетворення системи *ABCD* на геометрично незмінювану необхідно додати щонайменше ще один стрижень, з'єднавши вузли *A* і *C*, або *B* і *D* фактично перетворивши цю систему на системи із двох трикутних шарнірних підсистем *ABC* і *ADC* (див. рисунок 4.ґ.), або *ABD* і *BCD* (див. рисунок 4.д.). З точки зору кінематичного аналізу, кожна трикутна стрижнева підсистема називається диском. Об’єднані між собою диски також утворюють єдиний диск у разі, якщо вони мають два спільних шарніри, або спільний стрижень (як показано на рисунках 4.ґ. і 4.д.).

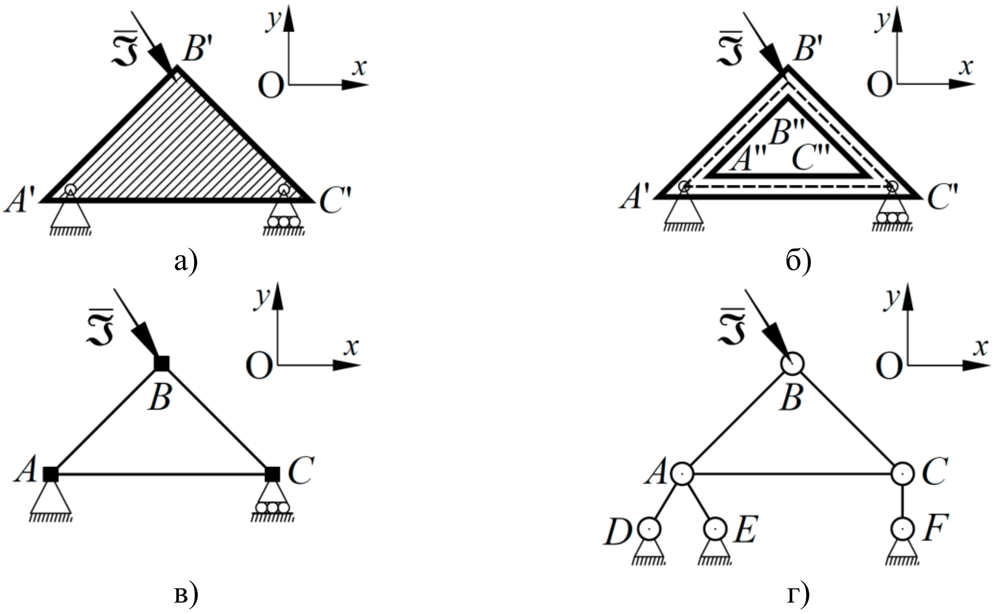


Рис. 3. Інтерпретація трикутного суцільного жорсткого тіла стрижневою шарнірною системою на площині: а) модель трикутного суцільного жорсткого тіла $A'B'C'$; б) утворення пустоти $A''B''C''$ у тілі $A'B'C'$; в) заміна граней пустотного тіла $A'B'C'A''B''C''$ на систему із жорстким сполученням стрижнів; г) заміна жорстких сполучень стрижнів на шарнірні

З даного прикладу випливає, що для послідовного розширення геометрично незмінюваної стрижневої системи кожен новий вузол має бути приєднаний до уже існуючого диску цієї системи, представленого шарнірним трикутником, за допомогою двох додаткових стрижнів. Слід зазначити також, що кожні два такі додаткові стрижні не повинні лежати на одній прямій, оскільки в такому разі система буде миттєво змінюваною [4].

Стрижневі системи (або ферми), одержані на основі такого підходу прийнято називати найпростішими системами. Приклади таких систем продемонстровані на рисунку 5. При перевірці геометричної незмінюваності будь-якої найпростішої стрижневої системи необхідно прийняти у ній так званий основний трикутник (на рисунку 5 такі основні трикутники умовно заштриховані); це може бути будь-який шарнірний трикутник даної ферми. У плоскій інтерпретації задач механіки ферми, що складаються виключно з шарнірних трикутників, є апріорно геометрично незмінюваними.

Перевірку геометричної незмінюваності можна виконувати й зворотнім шляхом, послідовно відкидаючи кожен вузол і по два стрижні, які у цьому вузлі сполучаються. Якщо у результаті такого послідовного вилучення від вихідної ферми залишається система у вигляді одного шарнірного трикутника, то можна вважати, що й досліджувана ферма також є геометрично незмінюваною.

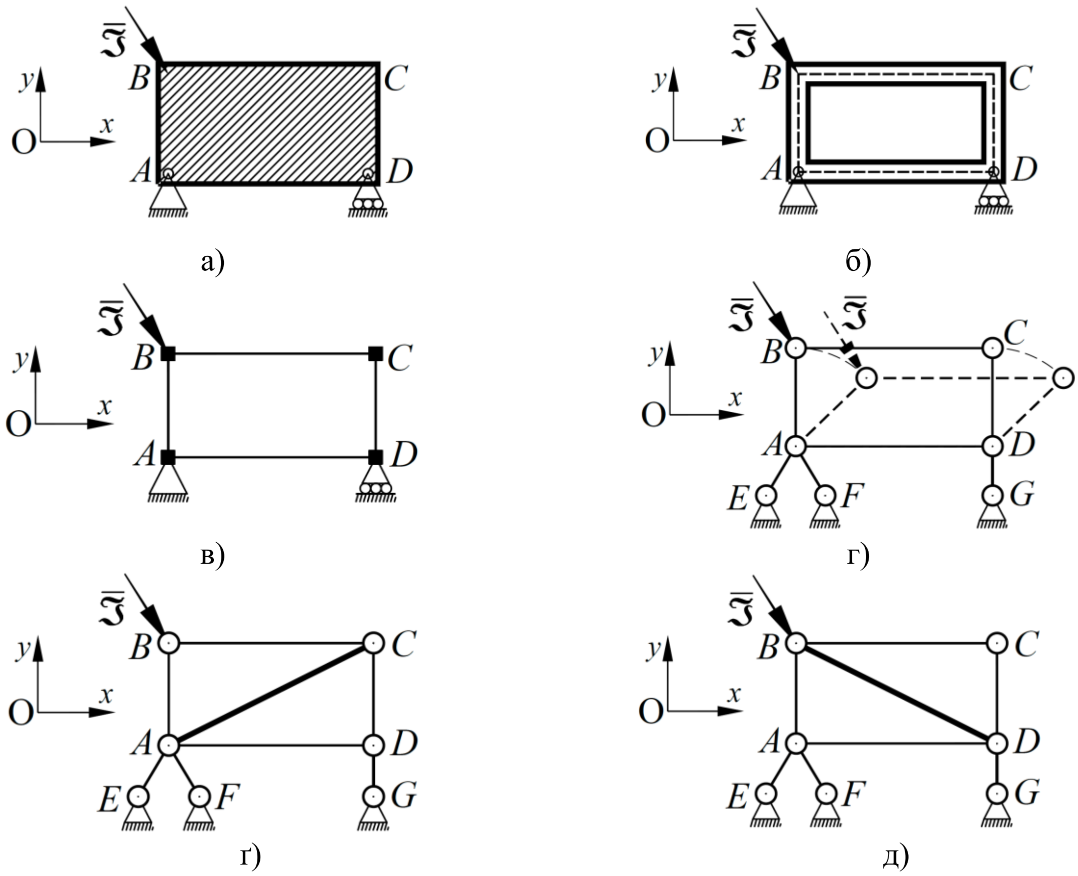


Рис. 4. Інтерпретація чотирикутного суцільного жорсткого тіла стрижневою шарнірною системою на площині: а) модель чотирикутного суцільного жорсткого тіла *A'B'C'D'*; б) утворення пустоти *A"B"C"D"* у тілі *A'B'C'D'*; в) заміна граней пустотного тіла *A'B'C'D'A"B"C"D"* на систему *ABCD* із жорстким сполученням стрижнів; г) заміна жорстких сполучень стрижнів системи *ABCD* на шарнірні із втратою її геометричної незмінюваності; ґ) додавання у систему *ABCD* стрижня *AC* для забезпечення її геометричної незмінюваності; д) додавання у систему *ABCD* стрижня *BD* для забезпечення її геометричної незмінюваності

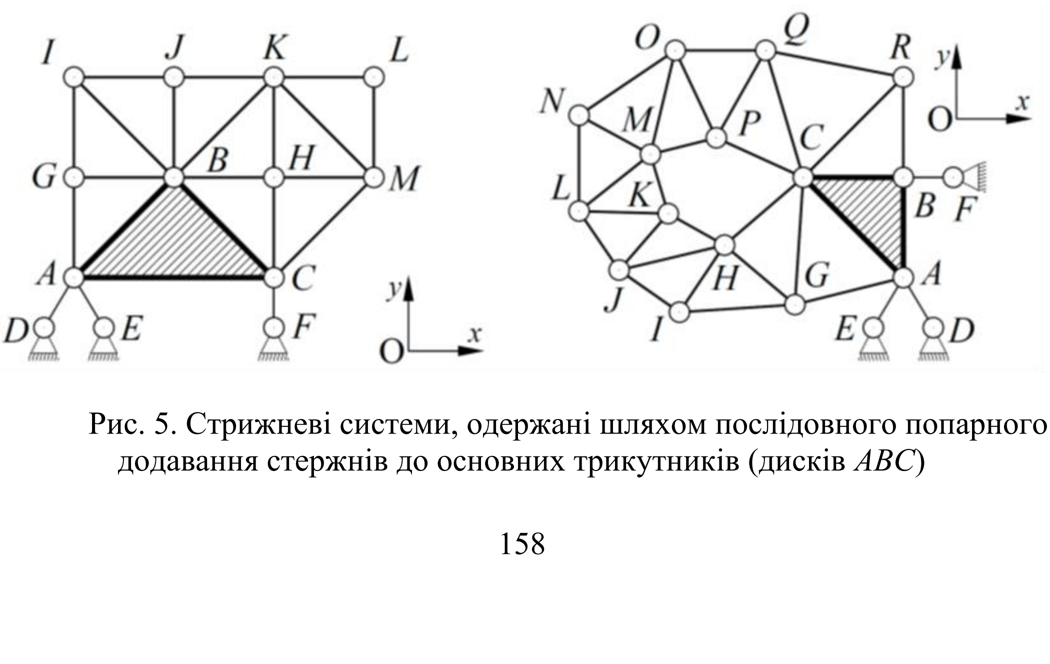


Рис. 5. Стрижневі системи, одержані шляхом послідовного попарного додавання стержнів до основних трикутників (дисків *ABC*)

Якщо позначити літерами W і V відповідно кількість стрижнів та вузлів механічної стрижневої системи (ферми), то повне число найпростішої геометрично незмінюваної стрижневої системи складатиме:

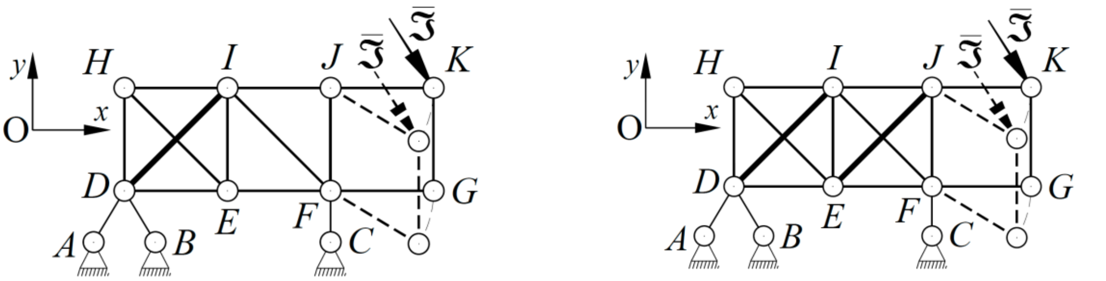
$$W = 3 + 2 \cdot (V - 3) \text{ або } W = 2 \cdot V - 3\,, \tag{1}$$

оскільки кожен основний шарнірний трикутник має по 3 вузли та по 3 стрижні, а кожен із приєднуваних (V–3) вузлів додаються шляхом сполучення двома стрижнями.

З формули (1) випливає, що для геометричної незмінюваності стрижневої системи необхідно, щоб виконувалася наступна умова:

$$W \geq 2 \cdot V - 3\,. \tag{2}$$

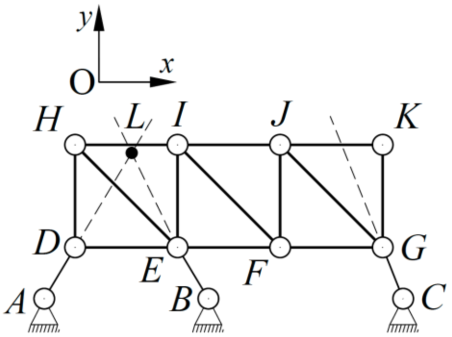
Зауважимо, що виконання умови (2) є необхідним, але не достатнім для повного набору вимог до геометричної незмінюваності стрижневої системи, оскільки деякі диски можуть містити не лише мінімально необхідну згідно з (2), але й надлишкову кількість стрижнів, в той час як деякі фрагменти системи можуть залишатися геометрично змінюваними, наприклад, якщо ці фрагменти представляють собою шарнірні чотирикутники (як це показано на рисунках 6.а. і 6.б.). Тобто, формула (2) може виконуватися, тоді як фактично геометрія системи не забезпечує утворення суцільного диску з елементів ферми.



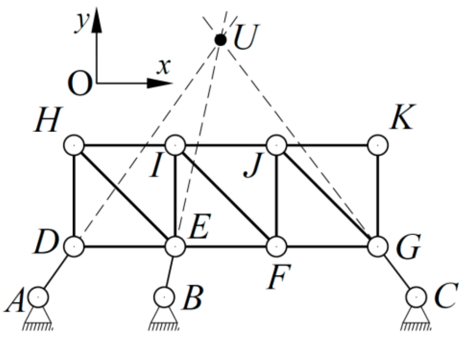
а) б)

Рис. 6. Ілюстрація необхідності, але не достатності виконання умови (2): а) випадок, коли W=2·V – 3, при якому стрижень DI є надлишковим, в той час як прямокутник $FGKJ$ є геометрично змінюваним; б) випадок, коли W>2·V – 3, при якому стрижні DI та EJ є надлишковими, в той час як прямокутник $FGKJ$ залишається геометрично змінюваним

Ще одним важливим питанням є приєднанням геометрично незмінюваної системи до основи. У двовимірному випадку найпростішим способом приєднання до основи являється застосування двох шарнірів – одного нерухомого і одного рухомого – або їх стрижневих аналогів (як це було показано на рисунках 3.г. та 4.г.). При цьому, два з трьох стрижнів не обов’язково мають бути сполучені у одному шарнірі (інтерпретуючи нерухомий шарнір), а натомість можуть бути роз’єднані й не мати спільних шарнірів, розміщуючись у різних частинах диску (див. рисунок 7.а.). Однак, якщо усі три опорні стрижні приєднані до диску таким чином, що їхні осі перетинаються в одній умовній точці *O* (яка представляє собою миттєвий центр обертання), то система вважатися геометрично змінюваною, оскільки в такому разі вона може здійснювати нескінченно малі обертальні переміщення, які на практиці можуть бути скінченними, хоч і малими (див. рисунок 7.а.). Система закріплена подібним чином володіє миттєвою рухомістю (тобто миттєвою змінюваністю). Окремим випадком такої миттєво змінюваної системи є система, усі три опорні стрижні якої є паралельними між собою (так як з математичної точки зору напрямки паралельних стрижнів перетинаються між собою у єдиній точці, що знаходиться на нескінченній віддаленості від системи; цю точку називають невласною). Наслідком цих тверджень стає правило, за яким можна з'єднувати два довільні диски між собою, утворюючи новий єдиний диск із використанням трьох нових стрижнів, а саме: два диска утворюють геометрично незмінювану систему, якщо вони поєднані між собою за допомогою трьох стрижнів, осі котрих не перетинаються у одній точці й не є паралельними між собою.



а)



б)

Рис. 7. Приєднання до основи із застосуванням стрижневих аналогів нерухомих шарнірів: а) правильне приєднання із застосуванням трьох стрижнів *AD, BE* і *CG* (точка *L* – місце перетину осей стрижнів *AD* і *BE*); б) неправильне приєднання: випадок, коли осі стрижнів *AD, BE* і *CG* перетинаються у спільній точці *U* – миттєвому центрі обертання

Спираючись на усе вище викладене, перейдемо до просторового (тривимірного) випадку.

Плоскі трикутні диски зберігають свою форму і у просторі за виключенням того, що кожен їх вузол має у тривимірному просторі не дві, а три координати. Тож, як і на площині, так і у просторі, трикутний диск можна інтерпретувати шарнірним стрижневим трикутником. Однак, так як вершини трикутника завжди лежать у одній площині, тоді як кістки людського організму інколи мають складну просторову форму, необхідно додатково ввести поняття просторового диску, який інтерпретуватиме складніші об'ємні тіла (фігури). Для цього знову скористаємося базовими положеннями механіки та по аналогії до двовимірного випадку розглянемо принципи наближеної заміни просторових суцільних тіл стрижневими конструкціями (системами). З точки зору геометрії (стереометрії) найпростішою просторовою фігурою є тетраедр, який має 4 вершини та 6 ребер. Як і у попередньому плоскому випадку, зобразимо в просторі суцільне жорстке тіло, але цього разу вже на трьох опорах й у формі тетраедральної піраміди (див. рисунок 8.а.). Також по аналогії до плоского випадку замінимо повнотілу піраміду на тетраедральний каркас *ABCD* із шарнірним сполученням стрижнів та прикладемо до утвореної стрижневої системи зусилля $\overline{\mathfrak{I}}$, у околі вершин *D*. Як і раніше, вважатимемо, що дія сили $\overline{\mathfrak{I}}$ спричиняє роботу системи (або тепер уже просторової ферми) лише у рамках пружних деформацій. Як і на площині, так і у просторі замінимо опори стрижневими аналогами, однак цього разу нерухома опора інтерпретуватиметься не двома, а трьома стрижнями (*EA, FA* і *GA*), у той час як рухомі опори можна замінювати як двома стрижнями (по два стрижня на опору: *HB* і *IB* та *JC* і *KC*, див. рисунок 8.а.), так і одним стрижнем (по одному стрижню на опору: *HB* та *KC*, наприклад), залежно від того, скільки ступенів свободи ми хочемо залишити даній опорі. Однак, із застосуванням одностріжневих опор слід бути вкрай обережним через складнощі забезпечення геометричної незмінюваності усієї конструкції або її локальних фрагментів у такому разі. Для справедливості варто сказати, що і для просторового випадку існує можливість виникнення миттєво змінюваних систем та центрів миттєвого обертання, але у даній роботі ми обмежмося лише згадкою про це. Процес переходу від повнотілої тетраедральної піраміди до просторової шарнірної ферми *ABCD* проілюстровано на рисунках 8.а г. Очевидно, отримана система не змінюватиме свою просторову форму під дію зовнішнього навантаження $\overline{\mathfrak{I}}$, допоки внутрішні зусилля, які виникають у стрижнях, спричинятимуть лише пружні деформації.

Для того, щоб додати ще один вузол до отриманої просторової елементарної шарнірної ферми, зберігаючи одержану конструкцію геометрично незмінюваною, необхідно сполучити цю вершину із трьома іншими вершинами за допомогою нових трьох стрижнів. Таким чином, якщо вважати, що для просторових ферм (знову ж таки, по аналогії з двовимірним випадком) у процесі їх перевірки на геометричну незмінюваність необхідно обирати основний шарнірний тетраедр, то залежність між кількістю стрижнів та вузлів моделі визначатиметься із наступних міркувань.

Нехай загальна кількість стрижнів та вузлів моделі, як і раніше, складають *W* і *V* відповідно. Основний шарнірний тетраедр має 4 вузли та 6 стрижнів (або ребер, якщо говорити суто геометричною термінологією); кожен із інших приєднуваних вузлів у кількості (*V*–4) приєднуються за допомогою трьох стрижнів. Відтак повна кількість стрижнів у найпростішій просторовій геометрично незмінюваній фермі складе:

$$W = 6 + 3\cdot(V-4) \text{ або } W = 3\cdot V - 6, \qquad (3)$$

звідки очевидно, що для геометричної незмінюваності просторової стрижневої системи необхідно (але не достатньо), щоб виконувалася наступна умова:

$$W \geq 3 \cdot V - 6. \qquad (4)$$

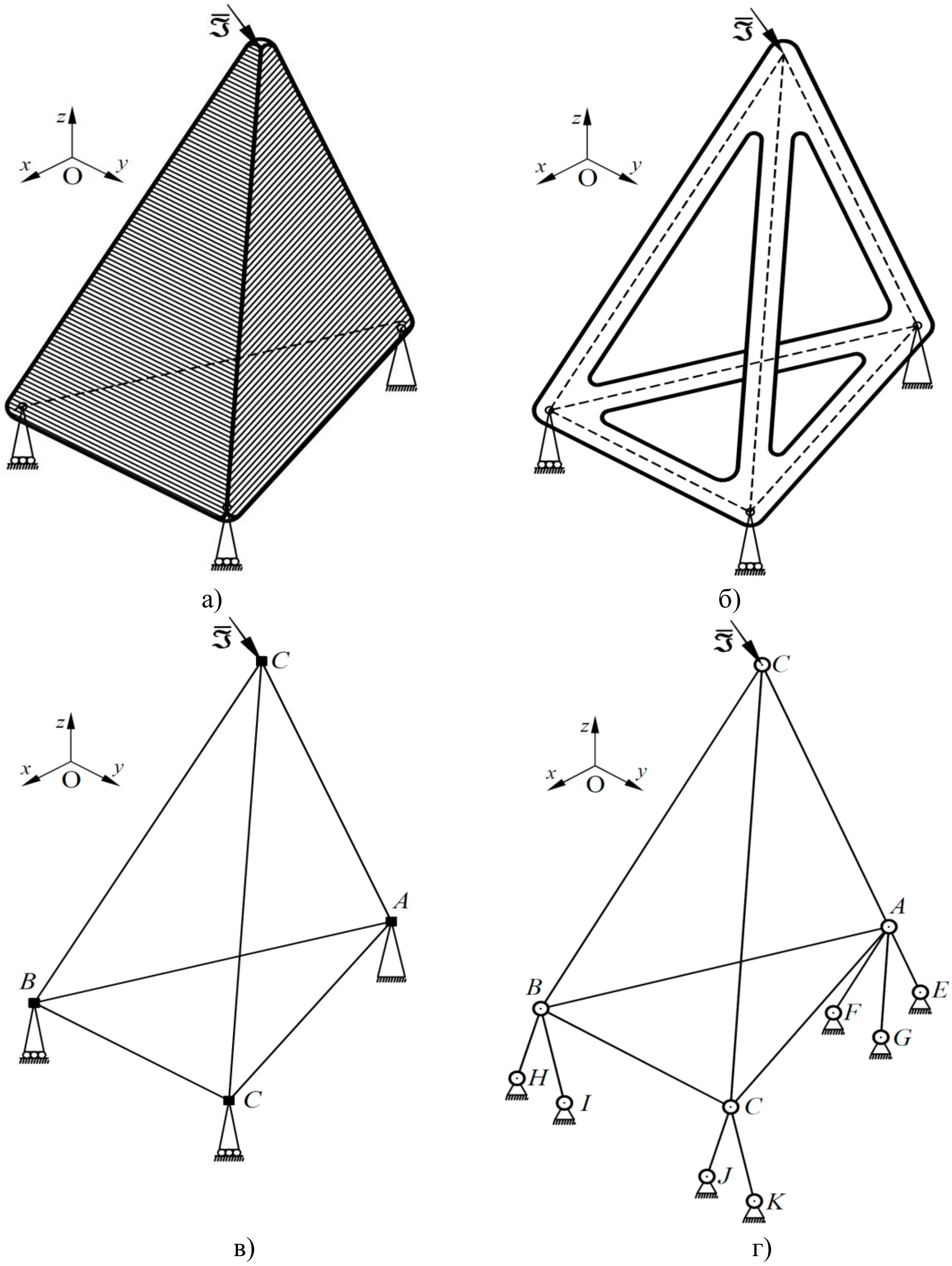


Рис. 8. Інтерпретація тетраедрального суцільного жорсткого тіла стрижневою шарнірною системою *ABCD* у просторі: а) вихідне тетраедральне суцільне жорстке тіло; б) утворення пустоти у просторовому тілі; в) заміна ребер пустотного тіла на систему із жорстким сполученням стрижнів; г) заміна жорстких вузлових сполучень стрижнів на шарнірні

Очевидно, що по відношенню до просторових ферм діють усі ті ж самі правила приєднання до основи, що й для плоских, за виключенням того, що кількість опорних стрижнів, як це було зазначено вище, потребується більша. Порядок перевірки геометричної незмінюваності просторових ферм також може здійснювати як шляхом аналізу почергового приєднання вузлів, так і шляхом послідовної декомпозиції системи, по аналогії з двовимірним випадком.

Приклад покрокової побудови стрижневої системи (ферми), одержаної на основі додавання вузлів до базового тетраедра, продемонстровані на рисунку 9.

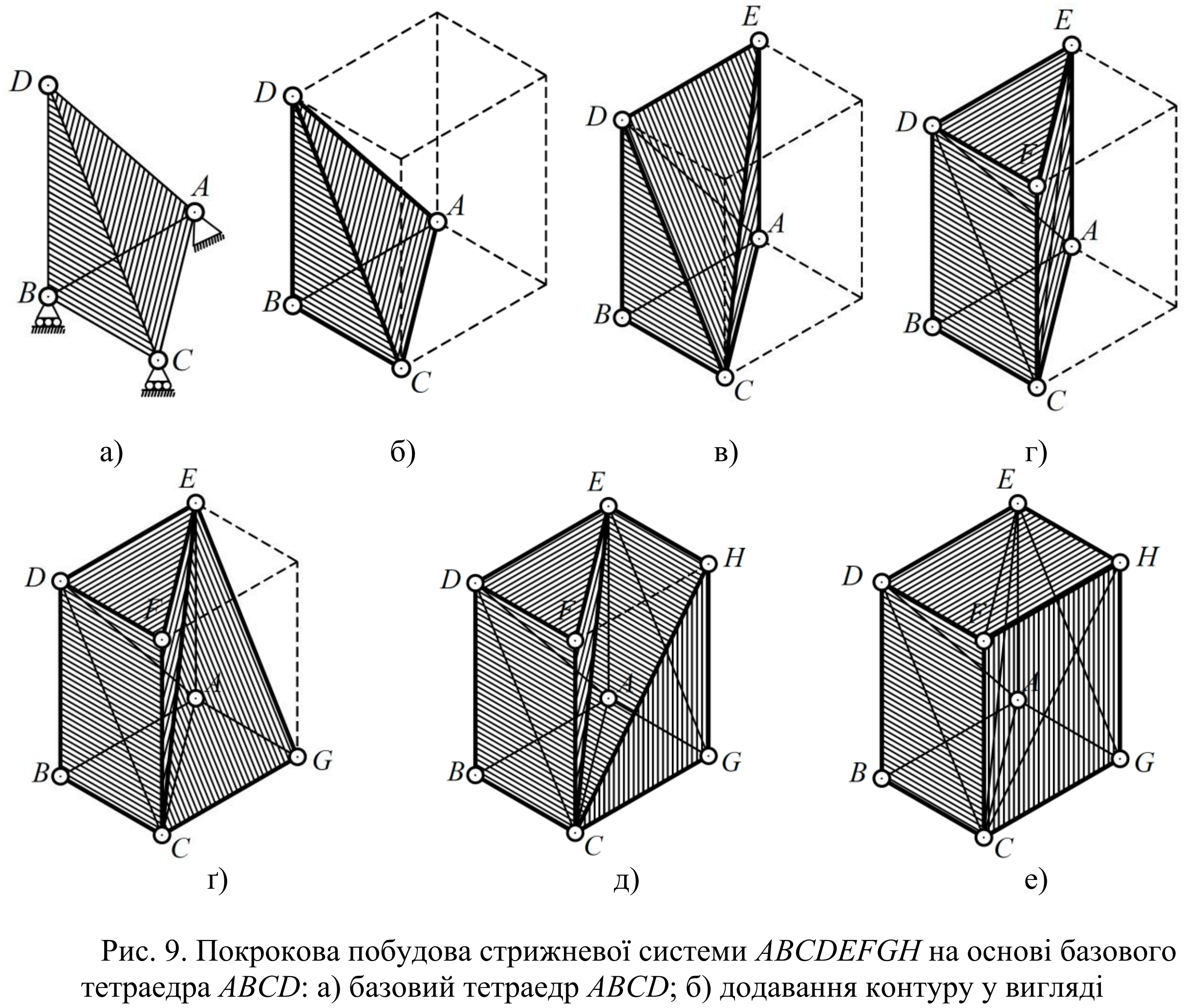


Рис. 9. Покрокова побудова стрижневої системи *ABCDEFGH* на основі базового тетраедра *ABCD*: а) базовий тетраедр *ABCD*; б) додавання контуру у вигляді прямокутного паралелепіпеда для обмеження області подальшого додавання вузлів та стрижнів; в) додавання вузла *E* та стрижнів *AE*, *CE* і *DE*; г) додавання вузла *F* та стрижнів *CF*, *DF* і *EF*; ґ) додавання вузла *G* та стрижнів *AG*, *CG* і *EG*; д) додавання вузла *H* та стрижнів *CH*, *EH* і *GH*; е) додавання стрижня *FH* та утворення просторового диску *ECFH*

Наведені співвідношення між кількістю вузлів і стрижнів, а також правила формування плоских та просторових моделей сітчастих структур представляють собою простий і наочно зрозумілий інструмент механічного формування та аналізу таких систем на предмет геометричної незмінюваності, будучи базовими тотожностями кінематичного аналізу.

Розуміючи правила забезпечення геометричної незмінюваності стрижневих систем, можна переходити до безпосереднього формування інтерпретаційних моделей кісток та м'язів, що входять до складу досліджуваних фрагментів опорно-рухового апарату людини.

Окрім того, одним із наступних етапів дослідження має стати математична формалізація умов статичної рівноваги вузлів побудованих моделей та визначення внутрішніх зусиль у їхніх елементах (стрижнях або тросах). На основі такої формалізації повинна бути сформована система рівнянь форми та положення усієї дискретної інтерпретаційної біотенсегріті-моделі опорно-рухового апарату, що дозволить аналізувати механізми передавання навантажень між елементами відповідної моделі у межах їх пружного деформування.

Висновки. У роботі розглянуто геометричні основи інтерпретаційного моделювання опорно-рухового апарату людини на базі концепції біотенсегріті з позицій прикладної геометрії та будівельної механіки. Показано, що складні просторові елементи кістково-м'язової системи можуть бути коректно подані у вигляді дискретних шарнірно-стрижневих моделей, які зберігають геометричну незмінюваність і дозволяють аналізувати передачу механічних навантажень у межах виконання закону Гука (пружних деформацій).

Обґрунтовано доцільність використання інтерпретаційних моделей як інструменту спрощеного, але фізично змістовного опису механічної поведінки кісткових структур. На основі аналізу плоских і просторових стрижневих систем встановлено умови геометричної незмінюваності моделей, зокрема взаємозв'язок між кількістю вузлів і стрижнів, а також правила приєднання нових елементів без втрати механічної стійкості системи.

Показано, що застосування принципів біотенсегріті у поєднанні з методами кінематичного та геометричного аналізу може стати основою для формування узагальненої моделі опорно-рухового апарату як ієрархічної механічної системи, у якій кістки переважно сприймають стискальні зусилля, а м'язи, зв'язки та сухожилля – розтягувальні. Такий підхід створює передумови для дослідження перерозподілу внутрішніх зусиль та локальних перевантажень окремих елементів системи.

Отримані результати формують геометричне та інженерне підґрунтя для подальшого розвитку біотенсегріті-моделей опорно-рухового апарату людини та їх використання у чисельних біомеханічних дослідженнях, аналізі навантажень, складанні реабілітаційних методик і програм фізичної терапії. Запропонований підхід може бути використаний як базовий рівень моделювання при створенні більш складних багаторівневих моделей, орієнтованих на практичне застосування у сфері фізичної терапії та реабілітації.

Література

1. Будівельна механіка : конспект лекцій / П. П. Лізунов, В. О. Недін. – Київ : КНУБА, 2022. 172 с.
2. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теорія пружності. К.: Наукова думка, 1979. 508 с.
3. Баженов В.А. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології моделювання: підручник / А. В. Перельмутер, О. В. Шишов. – К. : ПАТ «ВІПОЛ», 2013. – 896 с.
4. Скочко В. І. Методи інтерпретаційного геометричного моделювання сітчастих структур та їх застосування: дис. … канд. техн. наук. Київ: КНУБА, 2021. 277 с.
5. Fuller R. B. Synergetics: Explorations in the Geometry of Thinking. New York: Macmillan, 1975.
6. Snelson K. Continuous tension, discontinuous compression structures. U.S. Patent No. 3, 169, 611, 1965.
7. Pugh A. An Introduction to Tensegrity. Berkeley: University of California Press, 1976.
8. Motro R. Tensegrity: Structural Systems for the Future. London: Kogan Page Science, 2003.
9. International Journal of Space Structures. Special Issue on Tensegrity Structures. Vol. 11, No. 1–2, 1996.
10. Levin S. A suspensory system for the sacrum in pelvic mechanics: Biotensegrity. Journal of Bodywork and Movement Therapies, 2007. DOI: 10.1016/B978-044310178-6.50017-7.
11. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The Finite Element Method. 6th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2005.
12. Skochko V., Solonnikov V., Pohosov O., Haba K., Kulinko Ye., Koziachyna B. Minimization of Heat Losses in District Heating Networks by Optimizing their Configuration. Problems of the Regional Energetics. scientific, informational, analytical and engineering journal. Issue 3(63), 2024: pp. 205-220. DOI: https://doi.org/10.52254/1857-0070.2024.3-63.15
13. Жарова І.О., Кучерява О.В., Скочко В.І. Визначення функціональної залежності між надмірною вагою та мірою перенавантаження колінних суглобів у жінок з гоналгіями. Спортивна медицина, фізична терапія та ерготерапія. К.: НУФВСУ, 2024. Вип. № 1/2024. С. 183-194. DOI: https://doi.org/10.32652/spmed.2024.1.183-194

References

1. *Construction Mechanic*s: *Lecture Notes* / P. P. Lizunov, V. O. Nedin. – Kyiv: KNUBA, 2022. 172 p.
2. Timoshenko, S. P., Goodier, J. N. *Theory of Elasticity*. Kyiv: Naukova Dumka, 1979. 508 p.
3. Bazhenov V.A. *Construction Mechanics. Computer modeling technologies: textbook* / A. V. Perelmuter, O. V. Shyshov. – K.: PJSC "VIPOL", 2013. – 896 p.
4. Skochko, V. I. *Methods of Interpretive Geometric Modeling of Mesh Structures and Their Application*. PhD Thesis. Kyiv: Kyiv National University of Construction and Architecture (KNUBA), 2021. 277 p.
5. Fuller, R. B. *Synergetics: Explorations in the Geometry of Thinking*. New York: Macmillan, 1975.
6. Snelson, K. Continuous tension, discontinuous compression structures. U.S. Patent No. 3,169,611, 1965.
7. Pugh, A. *An Introduction to Tensegrity*. Berkeley: University of California Press, 1976.
8. Motro, R. *Tensegrity: Structural Systems for the Future*. London: Kogan Page Science, 2003.
9. *International Journal of Space Structures*. Special Issue on Tensegrity Structures, Vol. 11, No. 1–2, 1996.
10. Levin, S. A suspensory system for the sacrum in pelvic mechanics: Biotensegrity. *Journal of Bodywork and Movement Therapies*, 2007. DOI: 10.1016/B978-044310178-6.50017-7.
11. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. *The Finite Element Method*. 6th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2005.
12. Skochko V., Solonnikov V., Pohosov O., Haba K., Kulinko Ye., Koziachyna B. Minimization of Heat Losses in District Heating Networks by Optimizing their Configuration. Problems of the Regional Energetics. scientific, informational, analytical and engineering journal. Issue 3(63), 2024: pp. 205-220. DOI: https://doi.org/10.52254/1857-0070.2024.3-63.15
13. Zharova I.O., Kucheriava O.V., Skochko V.I. *Determination of the functional dependence between excess weight and the degree of overload of women's knee joints with gonalgia*. Sports medicine, physical therapy and occupational therapy. K.: NUFVSU, 2024. Issue No. 1/2024. P. 183-194. DOI: https://doi.org/10.32652/spmed.2024.1.183-194

Ph.D. student, teacher, **Olha KUCHERIAVA**
Sportkutcheriava.olha@gmail.com, ORCID: 0009-0003-3260-2903
National University of Ukraine on Physical Education and Sport
Doctor of Technical Sciences, Professor, **Volodymyr SKOCHKO**
volodymyr.work.pro@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1709-2621
Kyiv National University of Construction and Architecture
Assistant, **Vadim SPIRIDONOV,**
spiridonov.vh@knuba.edu.ua, ORCID: 0009-0003-4318-1833
Kyiv National University of Construction and Architecture

GEOMETRIC BASIS OF CONSTRUCTING A MODEL OF THE HUMAN MUSCULOSKELETAL SYSTEM BASED ON THE IDEA OF THE WORK OF BIOTENSEGRITY

The relevance of research devoted to geometric modeling of the human musculoskeletal system is determined by the need for a formalized description of its spatial structure and mechanical behavior for further application in biomechanics, physical therapy, and engineering practice. The complexity of the anatomical structure of the musculoskeletal system and the interactions among its elements necessitate the use of generalized models capable of capturing the fundamental patterns of load transfer without excessive complication of the mathematical framework.

This paper examines the geometric foundations of interpretive modeling of the human musculoskeletal system based on the concept of biotensegrity. An approach is proposed for representing elements of the musculoskeletal system in the form of discrete rod models with hinged connections, which makes it possible to focus the analysis on axial forces and ensure the geometric invariance of the structures. The conditions of static determinacy of such systems and the features of their geometric interpretation in planar and spatial cases are analyzed.

An analysis of the relationship between the number of nodes and rods in the models is performed, ensuring mechanical stability and the ability to adequately reproduce load transfer within the elastic deformation range. It is shown that the application of methods of applied geometry and structural mechanics allows the formation of a generalized model of the musculoskeletal system as a geometrically invariant structure suitable for further numerical and applied studies.

The obtained results provide a geometric and engineering basis for the development of refined biotensegrity models of elements of the human musculoskeletal system and can be used in the construction of models for load analysis, rehabilitation methodologies, and physical therapy applications.

Keywords: biotensegrity, interpretative physical-mathematical model, human musculoskeletal system, excess weight, obesity, physical therapy.