

аспірант, викладач кафедри терапії та реабілітації, **Кучерява О. В.**,
kutcheriava.olha@gmail.com, ORCID: 0009-0003-3260-2903
Національний університет фізичного виховання та спорту України

Д.т.н., професор, завідувач кафедри споруд спеціального призначення,
Скочко В. І.,
volodymyr.work.pro@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1709-2621
Київський національний університет будівництва і архітектури

аспірант, асистент кафедри споруд спеціального призначення
Посікера А. В.,
posikera142@gmail.com, ORCID: 0009-0003-3989-2704
Київський національний університет будівництва і архітектури

СТАТИЧНА РІВНОВАГА ВУЗЛІВ БІОТЕНСГРІТІ-МОДЕЛІ ОПОРНО-РУХОВОГО АПАРАТУ ЛЮДИНИ

Робота присвячена дослідженню математичних умов статичної рівноваги вузлів дискретно представленої інтерпретаційної біотенсгріті-моделі опорно-рухового апарату (ОРА) людини. Актуальність даної тематики обумовлена необхідністю формалізованого математичного опису спільної роботи кісток, м'язів та сухожилків, що входять до складу нижньої частини людського тіла, як механічної системи, що перебуває під дією заданих вагових навантажень. Відповідний опис дозволяє побудувати модель, яка у свою чергу дає змогу шляхом дискретного геометричного моделювання визначати внутрішні зусилля у всіх її ланках. Саму модель побудовано на основі уявлення про геометрично інваріантні сітчасті структури, кожна ланка яких у механічній інтерпретації працює виключно на стиск або розтяг, унеможливаючи виникнення згинальних або крутних моментів за рахунок шарнірного сполучення відповідних ланок. Водночас, модель має властивості просторових тенсгріті структур, які передбачають, що усі стиснуті ланки представляють собою стрижні, а усі розтягнуті ланки – троси. Будучи застосованим до біомеханічних задач, такий підхід описує роботу так званих біотенсгріті-моделей ОРА. Дана робота є логічним продовженням дослідження основ формування геометрично незмінюваних сітчастих структур шляхом їх поетапного кінематичного аналізу.

На основі уявлення про зрівноважені сітчасті структури було побудовано систему рівнянь статичної рівноваги для вільних вузлів просторових біотенсгріті-моделей, що дозволяє визначити взаємодію стискальних і розтягувальних елементів у межах їх пружної деформації під

дією прикладених вузлових навантажень. Розглянуто особливості побудови відповідних рівнянь для дискретних систем із попередньо-напруженими ланками.

Продемонстровано, що застосування методів прикладної геометрії із урахуванням принципів роботи класичних механічних систем забезпечує коректну математичну інтерпретацію роботи ОРА людини. Отримані результати створюють основу для подальших чисельних досліджень, зокрема для моделювання та аналізу компонентів напружено-деформованого стану елементів інтерпретаційної моделі, її поетапної оптимізації та застосування у задачах біомеханіки, терапії й реабілітації.

Ключові слова: біотенсегриті, рівняння статичної рівноваги вузлів, інтерпретаційна сітчаста структура, опорно-руховий апарат, фізична терапія, реабілітація, дискретне геометричне моделювання.

Постановка проблеми. Опорно-руховий апарат (ОРА) людини є складною багатокомпонентною механічною системою, у якій кістки, суглоби, м'язи та сполучні тканини працюють узгоджено для забезпечення стабільності тіла та виконання рухів. З позицій класичної механіки така система може бути розглянута як поєднання дискретних елементів, що працюють на стиск, представляючи собою стрижні, та розтяг, будучи тросами, канатами або нитками. Саме на цьому принципі ґрунтується концепція біотенсегриті, відповідно до якої кістки виконують роль стискувальних елементів, а м'язи, сухожилки, зв'язки й фасції – елементів натягу. Варто зазначити, що в окремих випадках кістки також можуть працювати на розтяг, а деколи навіть на згин та кручення; проте це не відповідає природному характеру їх роботи й може призвести до деструктивних наслідків, що негативно відобразяться на здоров'ї людини.

Незважаючи на активне використання біотенсегриті-підходу в біомеханіці, фізичній терапії та реабілітації, питання формалізованого математичного опису статичної рівноваги таких моделей з точки зору класичної механіки залишається недостатньо опрацьованим. Більшість наявних моделей носять більше ілюстративний характер, а ніж практичний, і не дозволяють безпосередньо визначати внутрішні зусилля в елементах ОРА, зокрема під дією підвищених навантажень.

Особливо актуальною ця проблема є для аналізу роботи колінних суглобів, які зазнають значних механічних впливів, зокрема у людей з надмірною масою тіла та ожирінням. Надлишкове навантаження призводить до перевантаження кісток, суглобів і м'язих тканин, що зумовлює необхідність розроблення інженерно обґрунтованих моделей для оцінювання напруженого стану елементів ОРА та пошуку шляхів його корекції. Відповідні моделі можуть дозволити не лише з високою точністю визначати фактичні значення внутрішніх зусиль в м'язах та кістках у практично будь-якій позі людського тіла, але й прогнозувати значення

вузлових переміщень, що у свою чергу дозволить аналізувати характер деформування моделі. Отримані дані дадуть можливість підбирати такі засоби фізичної терапії, що не шкодитимуть людині та забезпечуватимуть контрольований розподіл внутрішніх зусиль, який не лише сприятиме зміцненню необхідних груп м'язів, але й не перевантажуватиме суглоби.

У зв'язку з цим виникає потреба у створенні інтерпретаційної фізико-математичної моделі ОРА людини, яка поєднувала б геометричну незмінюваність стрижневих систем із можливістю формування системи рівнянь статичної рівноваги вузлів. Така модель має дозволяти визначати внутрішні зусилля в кістках і м'язах, оцінювати перевантаження у суглобах та слугувати науковим підґрунтям для подальшого удосконалення програм фізичної терапії й реабілітації. Розв'язання зазначеної проблеми потребує чіткого визначення мети дослідження та вибору методів, які забезпечують формування системи рівнянь статичної рівноваги для вузлів інтерпретаційної біотенсегріті-моделі ОРА.

Дане дослідження є продовженням роботи, присвяченої основам формування геометрично незмінюваної інтерпретаційної моделі ОРА, та спрямоване на математичну формалізацію механічних умов її статичної рівноваги.

Мета дослідження. Побудувати детальну геометрично незмінювану дискретну інтерпретаційну модель нижньої частини ОРА людини. Скласти систему рівнянь статичної рівноваги вільних вузлів побудованої моделі із урахуванням умов її геометричної незмінюваності у заданій позі.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Продемонстрований на попередньому етапі роботи підхід до побудови геометрично інваріантних інтерпретаційних моделей просторових геометрично незмінюваних об'єктів створює необхідне підґрунтя для розробки відповідних моделей кісток і їх комбінацій, а також повної біотенсегріті-моделі нижньої частини ОРА людини. Однак, для кращого розуміння специфіки роботи саме біотенсегріті-моделі слід брати до уваги напрацювання інших вчених та дослідників, що працювали і працюють над концепціями тенсегріті. При цьому не слід обмежуватися напрацюваннями фахівців у галузі фізичної терапії, адже концепція тенсегріті походить з галузі технічних наук і, зокрема інженерії.

Загалом, проблематика моделювання тенсегріті досліджується не лише у межах біомеханіки, але й у задачах будівельної механіки та прикладної геометрії [4, 11]. Водночас, одним із концептуальних підходів до опису механічної поведінки елементів ОРА людини є концепція тенсегріті, яка була початково запропонована та реалізована саме у конструктивних рішеннях просторових тросово-стрижневих систем [1, 2]. Подальший розвиток цієї ідеї у працях [3] та [4] дозволив сформулювати інженерне трактування тенсегріті як системи дискретних елементів, що працюють на стиск і розтяг, володіючи геометричною незмінюваністю.

У біомеханічних дослідженнях концепція тенсегріті набула розвитку у вигляді біотенсегріті-підходу, відповідно до якого ОРА людини розглядається як ієрархічна механічна система, що послідовно передає навантаження від верхніх елементів тіла людини до підошви стопи, як основи або опорних вузлів у механічній інтерпретації. Наприклад, у праці [5] показано, що кісткові елементи виконують функцію стиснутих компонентів, тоді як м'язи, сухожилки, зв'язки та фасції утворюють складну систему взаємопов'язаних елементів попереднього натягу, яка визначає цілісну та узгоджену з механічної точки зору поведінку ОРА в цілому. Результати цих досліджень також узагальнено у спеціалізованих наукових виданнях, присвячених просторовим і тенсегріті-структурам (зокрема, див. [6]).

Водночас більшість наявних робіт з біотенсегріті носять переважно ілюстративний або концептуальний характер і зосереджені на демонстрації загальних принципів передавання навантажень між елементами моделей. При цьому, праці, присвячені формалізованим математичним моделям, які дозволяють безпосередньо визначати внутрішні зусилля у вузлах і ланках подібних систем, представлені обмежено [4] або посилаються на можливість застосування методів чисельного моделювання (таких як, наприклад, метод скінченних елементів [10]) для визначення компонентів напружено-деформованого стану усіх їхніх елементів у найбільш широкому спектрі (що, у деякому сенсі, не позбавлене здорової логіки, оскільки методи чисельного моделювання, хоч і є більш громіздкими у реалізації та менш інтуїтивно зрозумілими, проте являються чудовим інструментом верифікації одержаних результатів моделювання та добре зарекомендували себе у найрізноманітніших галузях науки і техніки). У багатьох дослідженнях також відсутній чіткий зв'язок між геометричною структурою моделі та системою рівнянь, що описують її статичну рівновагу, що ускладнює їхнє практичне застосування за відсутності належним чином опрацьованих програмних алгоритмів, доведених до рівня впровадження, або за відсутності уже апробованого спеціалізованого програмного забезпечення.

З іншого боку, у будівельній механіці та теорії стрижневих систем добре розроблені методи аналізу статично визначуваних і статично невизначуваних конструкцій, а також підходи до формування систем рівнянь рівноваги вузлів [7, 8]. Класичні праці з теорії пружності та чисельного моделювання, зокрема із вищезгаданим методом скінченних елементів, демонструють ефективний інструментарій для аналізу напружено-деформованого стану інженерних конструкцій [9, 10]. Однак, дуже часто пряме застосування цих методів до біомеханічних об'єктів ускладнюється їх заплутаною геометрією та значним спектром фізико-механічних параметрів, які необхідно враховувати під час моделювання, й значення яких є або невідомими, або, щонайменше, неочевидними.

Таким чином, аналіз наукових публікацій свідчить про незначну кількість досліджень, присвячених розробці простих і наочних способів опису статичної рівноваги біотенсегріті-моделей ОРА людини, а також про нестачу методів їх геометричного або чисельного моделювання у мірі, достатній для можливості практичного застосування при складанні комплексних програм терапії та реабілітації.

Відтак, опис у достатній мірі точної дискретної моделі ОРА людини та складання системи рівнянь рівноваги її вільних вузлів є ключовим для відтворення механізму передавання вагових або інших навантажень через внутрішньоелементні зусилля та подальшого переходу до оцінювання повного спектру компонентів напружено-деформованого стану елементів відповідної моделі.

Виклад основного матеріалу. Розуміючи правила забезпечення геометричної незмінюваності стрижневих систем та основ їх кінематичного аналізу, можна перейти до безпосереднього формування інтерпретаційних моделей кісток. На цьому етапі умовно будуватимемо модель, вважаючи, що ОРА перебуває у положенні стоячи (при чому стопи обох ніг повністю і анатомічно правильно контактують із землею/підлогою, яку у подальшому називатимемо основою). Це важливо для розуміння того, які саме вузли моделі слід вважати опорними, а які вільними. Також, вбачаючи, що у подальшому модель кісток буде доповнена м'язами (для утворення повної моделі нижньої частини ОРА людини у форматі біотенсегріті), ми на даному етапі пропускатимемо деякі номери вузлів до моменту власне додавання елементів, що інтерпретуватимуть відповідні м'язи і місця їх кріплень до кісток. Розглядатимемо кістки та їх сполучення знизу-вверх, поділяючи відповідні комбінації на чотири умовних фрагменти моделі та рівні.

1. Рівень 1 – фрагмент інтерпретаційної стрижневої моделі кісток стопи. Кістки стопи діляться на три групи: заплеснені кістки (лат. tarsus), плеснові кістки (лат. metatarsus) та фаланги (лат. phalanx). Так як фаланги у положенні людини стоячи на двох ногах повністю контактують із основою, пропонується інтерпретувати відповідні групи кісток одиничними стрижнями для кожного пальця (усього 5 стрижнів: $S_{01}S_{06}$, $S_{02}S_{07}$, $S_{03}S_{08}$, $S_{04}S_{09}$ та $S_{05}S_{10}$), при чому початок і кінець кожного стрижня представлятимуть собою шарнірно-нерухомі опори. Плеснові кістки також доцільно інтерпретувати одиничними стрижнями, кожен з яких з одного кінця шарнірно приєднується до фаланг, а з іншої до групи заплеснених кісток (загалом 5 стрижнів: $S_{06}S_{11}$, $S_{07}S_{11}$, $S_{08}S_{11}$, $S_{09}S_{12}$ та $S_{10}S_{12}$). Самі ж заплеснені кістки найбільш раціонально інтерпретувати комбінацією із 9-ти стрижнів, сполучених 5-ма шарнірами, що утворюють жорстке тіло шляхом приєднання до базового просторового тетраедра $S_{11}S_{12}S_{13}S_{14}$ додаткового вузла S_{15} (за допомогою нових трьох стрижнів $S_{15}S_{12}$, $S_{15}S_{13}$ і $S_{15}S_{14}$), який є шарніром для подальшого кріплення маломілкової кістки. Найнижчий вузол даного фрагменту S_{13} інтерпретаційної моделі має бути приєднаний до основи і представляти собою шарнірно-нерухому опору. Ця опора

інтерпретує точку контакту п'яти з основою. Одержаний фрагмент інтерпретаційної моделі із кістками стопи представлений на рисунку 1.

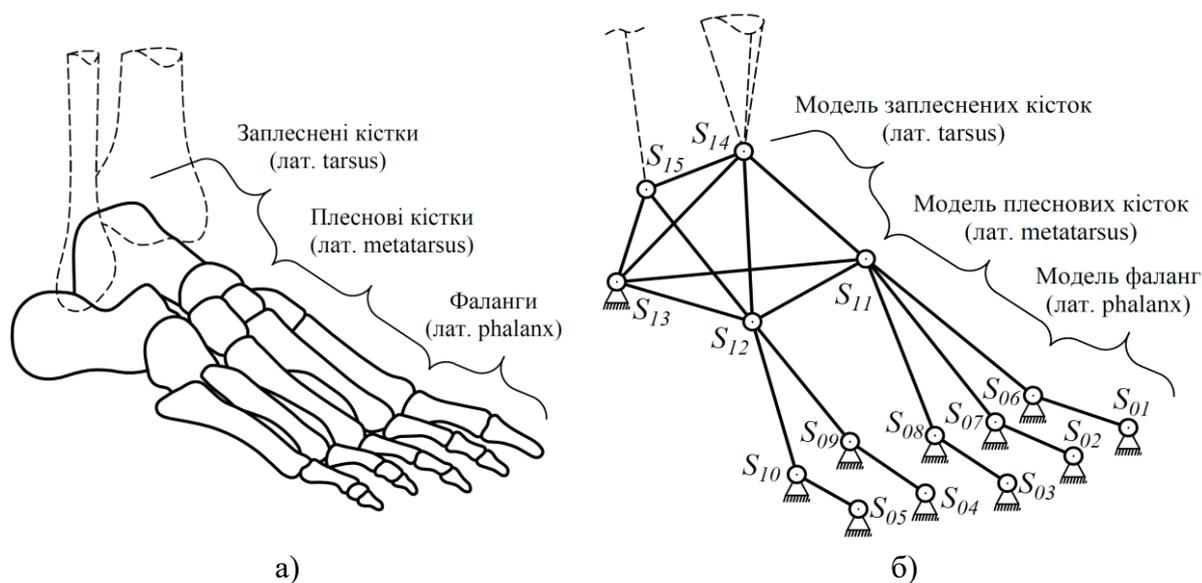


Рис. 1. Фрагмент інтерпретаційної стрижневої моделі кісток стопи: а) зображення основних груп кісток стопи; б) інтерпретаційна стрижнева модель кісток стопи

2. Рівень 2 – фрагмент інтерпретаційної стрижневої моделі великогомілкової (лат. tibia) та малогомілкової кісток (лат. fibula). Форма великогомілкової кістки характерна тим, що вона має більш вузьку основу та розширюється у верхній частині, забезпечуючи достатню площу контакту в колінному суглобі для сприйняття навантаження від стегнової кістки та від близько половини ваги верхньої частини тіла. Відтак, великогомілкову кістку можна у найбільш спрощеному вигляді інтерпретувати одним тетраедром $S_{14}S_{21}S_{22}S_{23}$ із одним вузлом S_{14} в основі та трикутником $S_{21}S_{22}S_{23}$ в оголовку (у верхній частині, що входить до складу колінного суглобу). Таким чином, великогомілкова кістка складається із 6-ти стрижнів ($S_{14}S_{21}$, $S_{14}S_{22}$, $S_{14}S_{23}$, $S_{21}S_{22}$, $S_{21}S_{23}$ та $S_{22}S_{23}$), сполучених 4-ма шарнірами. Малоюмілкова кістка є тоншою, ніж великогомілкова, та має відносно рівномірну товщину; це дозволяє припустити, що дана кістка має сталі (усереднені) параметри жорсткості по всій довжині, а значить, з механічної точки зору може бути інтерпретована єдиним стрижнем $S_{15}S_{23}$. Інтерпретаційна модель малогомілкової кістки верхнім кінцем шарнірно приєднується до великогомілкової кістки із зовнішньої сторони (у вузлі S_{23}), а нижнім кінцем шарнірно приєднується до зовнішнього боку заплеснених кісток (у вузлі S_{15}). Одержаний фрагмент інтерпретаційної моделі із великогомілковою та малогомілковою кістками представлений на рисунку 2.

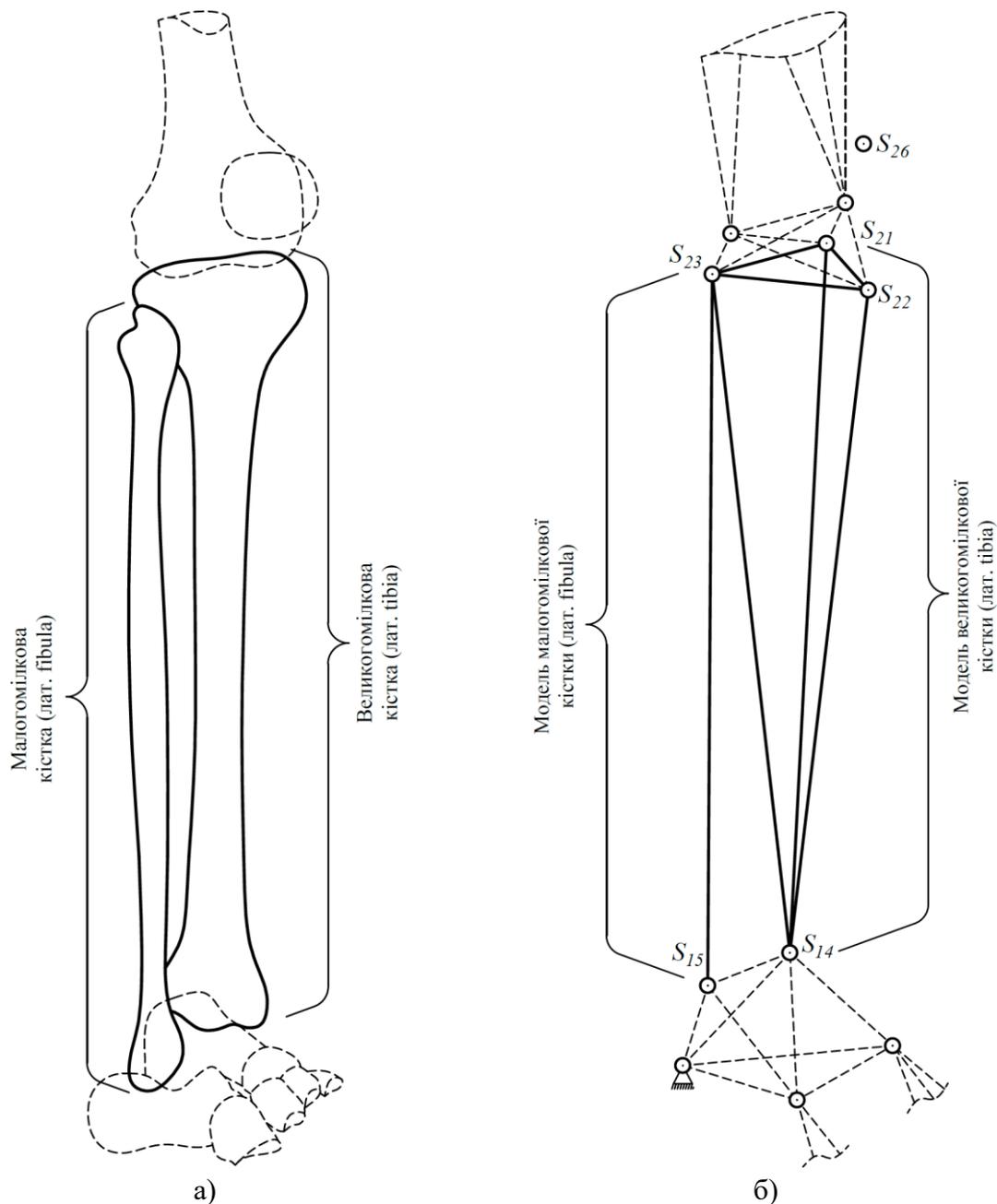


Рис. 2. Фрагмент інтерпретаційної стрижневої моделі великогомілкової та малогомілкової кісток: а) зображення великогомілкової та малогомілкової кісток; б) інтерпретаційна стрижнева модель великогомілкової та малогомілкової кісток

3. Рівень 3 – фрагмент інтерпретаційної стрижневої моделі колінної чашечки (лат. patella) та стегнової кістки (лат. os femoris). Так як колінна чашечка не є лінійним фрагментом ОРА, а скоріше ближча за формою до півсфери, будучи жорстким тілом, й, водночас, беручи до уваги, що колінна чашечка являється центром сполучення ряду сухожилків та м'язів, залишаючись відмежованою від кісток суглоба відповідними сухожилками, його можна інтерпретувати одним єдиним вузлом-шарніром.

Позначатимемо відповідний шарнір як вузол S_{26} , що не буде приєднаний до інших кісток жодними стрижнями фіксованої довжини.

Проте, забігаючи наперед, додамо, що остаточна модель нижньої частини опорно-рухового апарату людини передбачатиме приєднання вузла чашечки S_{26} до інших п'яти вузлів колінного суглоба (S_{21} , S_{22} , S_{23} , S_{24} і S_{25}) через сухожилки $S_{24}S_{26}$ й $S_{25}S_{26}$, а також через відгалуження чотиригодового м'яза $S_{21}S_{26}$, $S_{22}S_{26}$ й $S_{23}S_{26}$. Окрім цього, чотириголовий м'яз сполучатиме вузол чашечки S_{26} із вузлами дискретних моделей стегнової кістки (а саме: S_{27} і S_{29}) та тазу (а саме: S_{70}). Стегнова кістка, натомість, має складнішу просторову геометричну конфігурацію та Г-подібну форму, що може спричинити виникнення у ній згинальних і навіть крутних моментів. У зв'язку із цим її інтерпретаційну модель, як жорстке тіло, пропонується утворювати на основі базового тетраедра $S_{24}S_{27}S_{28}S_{29}$ із приєднанням до нього вузлів S_{25} (за допомогою стрижнів: $S_{25}S_{24}$, $S_{25}S_{27}$ і $S_{25}S_{29}$) та S_{30} (за допомогою стрижнів: $S_{30}S_{27}$, $S_{30}S_{28}$ і $S_{30}S_{29}$). Вузли S_{24} і S_{25} слугуватимуть шарнірами для уможливлення згинання моделі нижньої частини ОРА в колінному суглобі, тоді як вузол S_{30} слугуватиме шарніром тазостегнового суглобу, що утворюється у вертлюжній западині кісток тазу.

Одержаний фрагмент інтерпретаційної моделі із кістками колінної чашечки та стегнової кістки представлений на рисунку 3.

Тут варто додати, що між фрагментами моделей великогомілкової та стегнової кісток мають бути додані хрящові сполучні тканини колінного суглоба, які, виконуючи роль своєрідного демпферного шарніру, забезпечують плавність згинання ноги в коліні, пом'якшуючи надто різкі навантаження динамічного характеру. Відповідні тканини пропонується інтерпретувати пружними стрижнями $S_{21}S_{24}$, $S_{21}S_{25}$, $S_{22}S_{24}$, $S_{22}S_{25}$, $S_{23}S_{24}$ і $S_{23}S_{25}$.

4. Рівень 4 – фрагмент інтерпретаційної стрижневої моделі кісток тазу. Кістки тазу ще називаються тазостегновими кістками або тазовими кістками (лат. *os coxae*). Кожна тазостегнова кістка утворена з трьох кісток: клубової кістки (лат. *os ilium*), сідничної кістки (лат. *os ischii*) та лобкової кістки (лат. *os pubis*). Таз також включає криж (лат. *os sacrum*) та куприк (лат. *os coccygis*). Ці кістки зростаються в районі вертлюжної западини, утворюючи єдиний анатомічний утвір. Забезпечення геометричної незмінюваності інтерпретаційної стрижневої моделі тазових кісток представляє собою особливо складну задачу, оскільки таз містить симетричний набір кісток у лівій та правій частині ОРА людини й має сполучатися через тазостегнові суглоби із обома нижніми кінцівками, водночас маючи достатньо вузлів для передачі навантажень від верхньої частини тіла, а також для можливості приєднання достатньої кількості м'язів у подальшому. Щоб уникнути довгих викладок зазначимо лише, що побудова відповідної моделі виконується шляхом утворення двох базових сполучених у вузлі S_{72} жорстких тіл, представлених тетраедрами $S_{30}S_{61}S_{70}S_{72}$ та $S_{60}S_{62}S_{71}S_{72}$ із покроковим приєднанням до них додаткових вузлів та ланок до досягнення геометричної незмінюваності й просторової жорсткості. В результаті пропонується зупинити процес побудови моделі кісток тазу на мінімально-

необхідній комбінації вузлів і стрижнів, що утворюють просторову жорстку стрижневу систему $S_{30}S_{60}S_{61}S_{62}S_{63}S_{64}S_{65}S_{66}S_{67}S_{68}S_{69}S_{70}S_{71}S_{72}$, яка містить 14 вузлів та 36 стрижнів. Одержаний фрагмент інтерпретаційної моделі із кістками тазу представлений на рисунку 4.

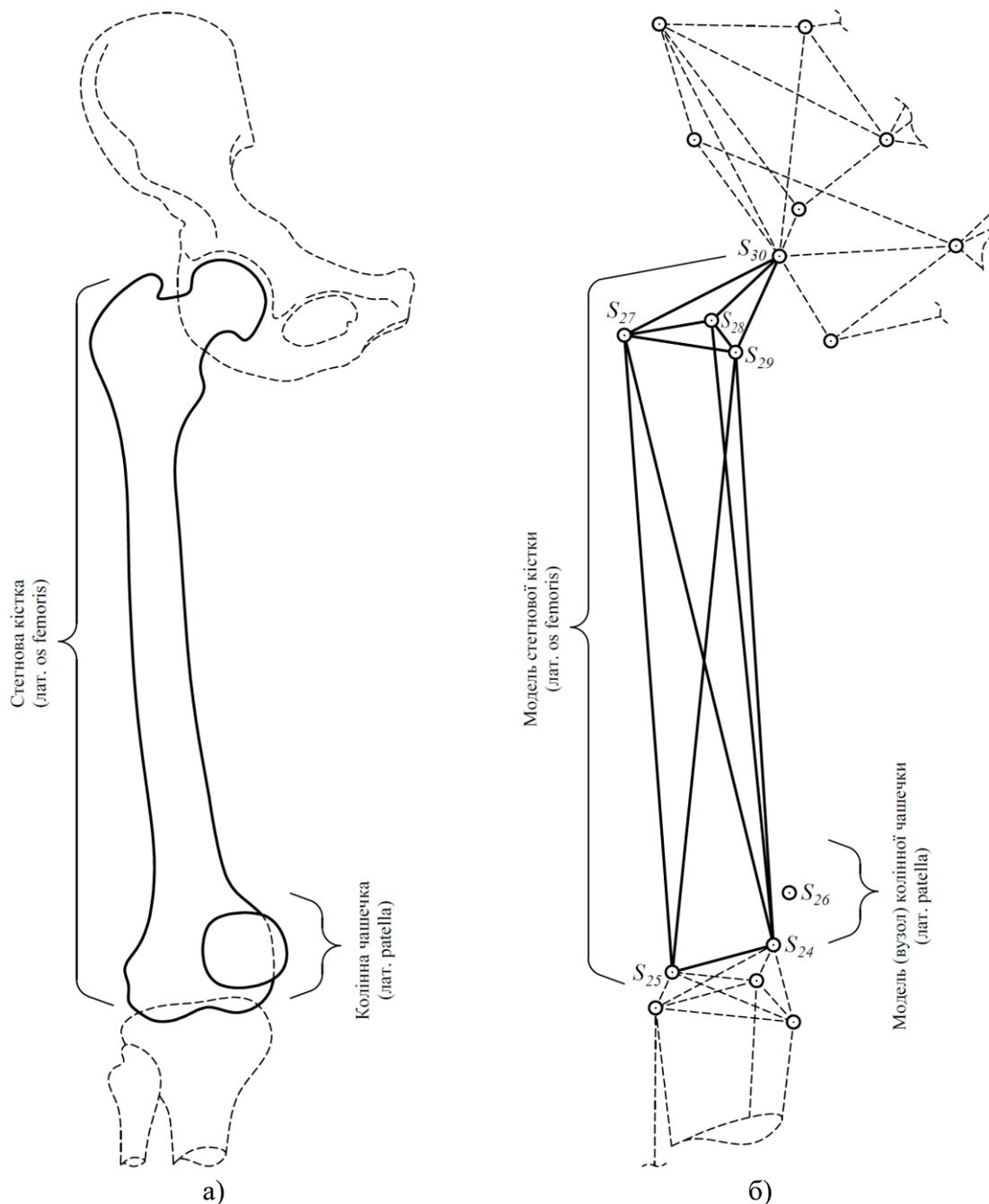


Рис. 3. Фрагмент інтерпретаційної стрижневої моделі колінної чашечки та стегнової кістки: а) зображення колінної чашечки та стегнової кістки; б) інтерпретаційна стрижнева модель колінної чашечки та стегнової кістки

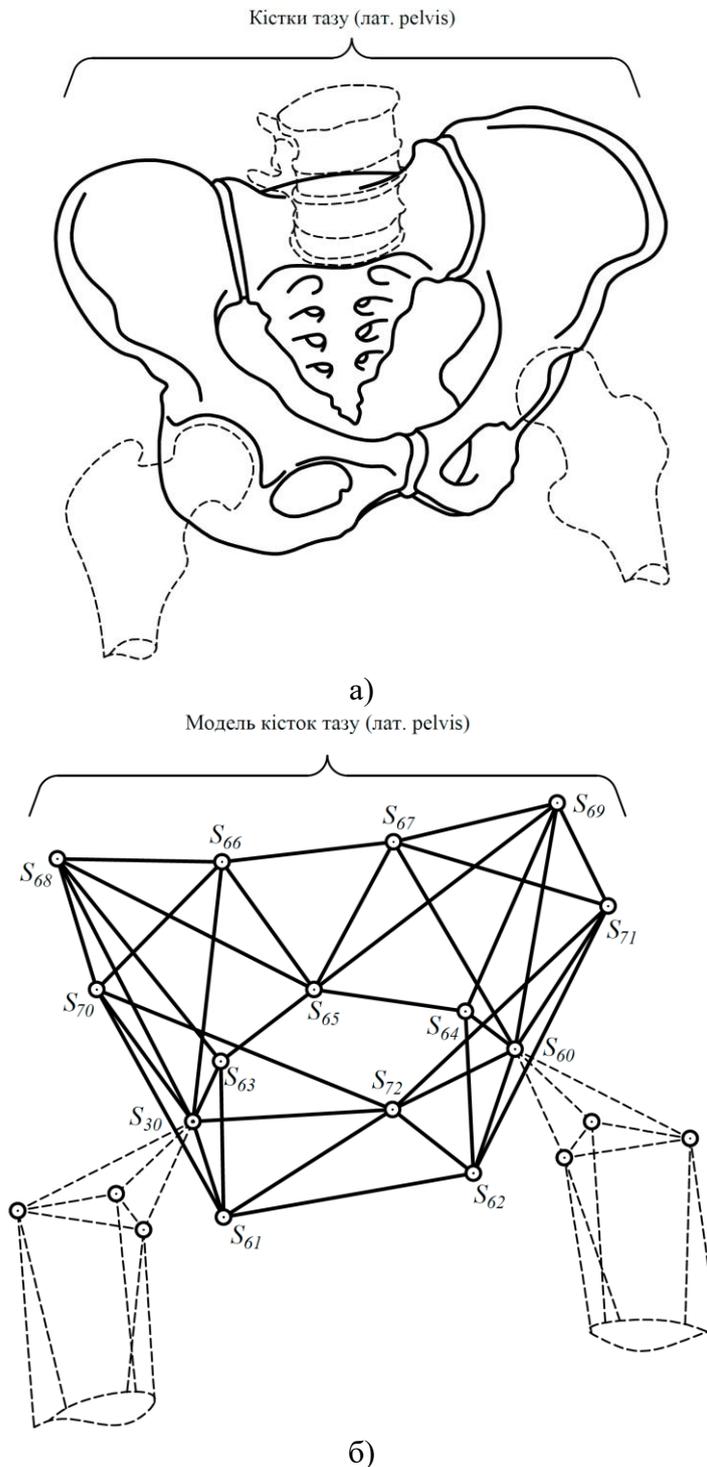


Рис.4. Фрагмент інтерпретаційної стрижневої моделі кісток тазу: а) зображення кісток тазу; б) інтерпретаційна стрижнева модель кісток тазу

Варто зазначити, що відсутність послідовності у нумерації вузлів вище продемонстрованих фрагментів моделі пов'язана із парністю усіх кісток нижніх кінцівок. Відтак, для кращого розуміння інтерпретаційної моделі кісток нижньої частини ОРА людини, на рисунку 5 приведено повний набір дискретно представлених фрагментів кісток, що включає усі 72 вузли лівої та правої ніг, а також тазу людського тіла.

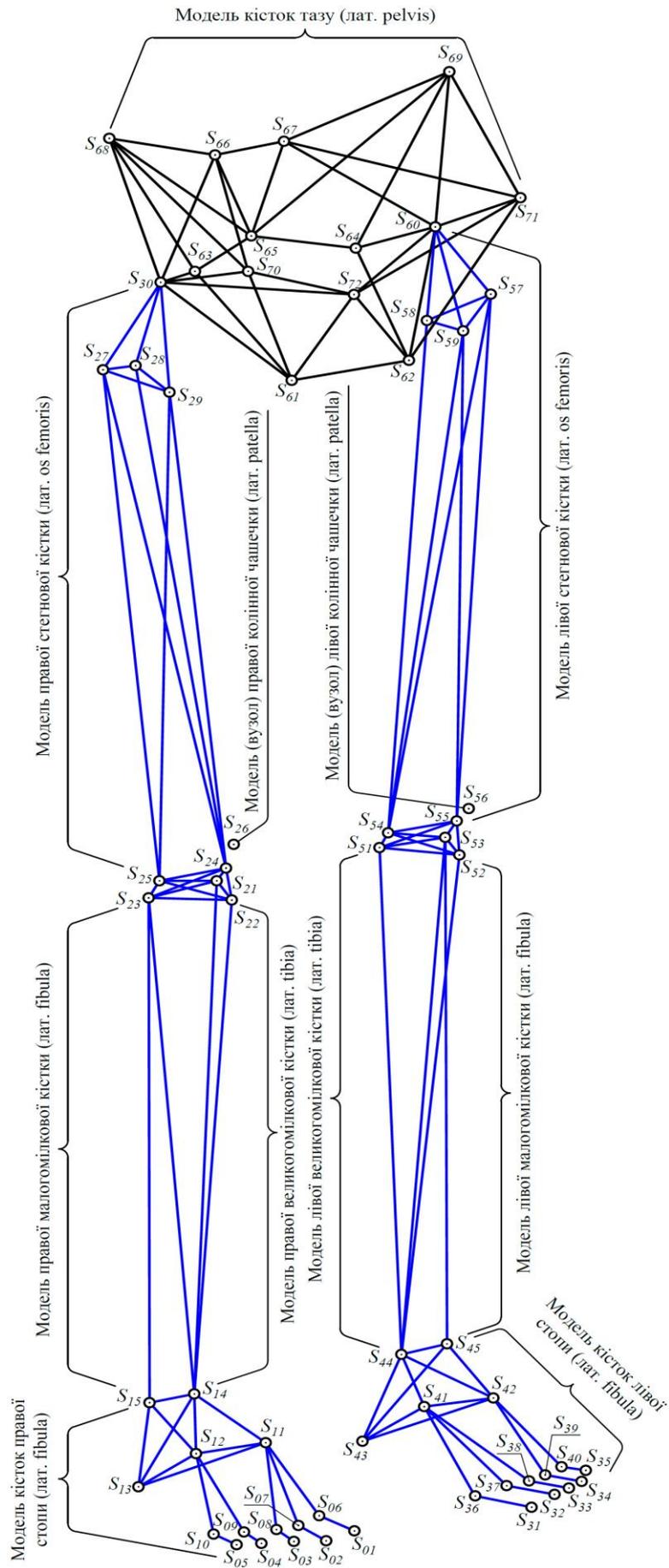


Рис.5. Інтерпретаційна дискретна модель кісток нижньої частини ОРА людини

Тепер, маючи інтерпретаційні моделі усіх кісток нижньої частини ОРА людського тіла, перевіримо, чи виконується наступна обов'язкова (але не достатня) умова геометричної незмінюваності для усіх чотирьох вищеописаних рівнів:

$$W \geq 3 \cdot V - 6, \quad (1)$$

де W і V – це відповідно кількість стрижнів (а у загальному випадку ланок) та вузлів досліджуваного фрагмента моделі.

Отже, одержимо:

1) для кісток стопи, згідно зі запропонованою інтерпретаційною стрижневою моделлю (див. рис. 1.б. та 5), якщо не враховувати опорні вузли $S_{01}, S_{02}, S_{03}, S_{04}, S_{05}, S_{06}, S_{07}, S_{08}, S_{09}$ та S_{10} (так як, наприклад, для правої ноги у позиції людини стоячи вини із землею та вузлами S_{11}, S_{12} та S_{13} утворюють геометрично незмінювану систему), доцільно перевіряти лише незмінюваність фрагмента системи $S_{11}S_{12}S_{13}S_{14}S_{15}$ для правої ноги (в той час як для лівої ноги це буде фрагмент $S_{41}S_{42}S_{43}S_{44}S_{45}$), для якого кількість вузлів та стрижнів складає: $V = 5$ та $W = 9$, й умова (1) виконується:

$$9 \geq 3 \cdot 5 - 6 = 9;$$

2) для інтерпретаційних стрижневих моделей малогомілкової та великогомілкової кісток (див. рис. 2.б. та 5), представлених лише одним стрижнем ($S_{15}S_{23}$ – для правої ноги, й $S_{45}S_{53}$ – для лівої ноги) та тетраедром ($S_{14}S_{21}S_{22}S_{23}$ – для правої ноги, й $S_{44}S_{51}S_{52}S_{53}$ – для лівої ноги) відповідно, матимемо наступні кількості вузлів та стрижнів: $V = 2$ та $W = 1$, а також $V = 4$ та $W = 6$; для обох випадків умова (1) виконується:

$$1 \geq 3 \cdot 2 - 6 = 0,$$

$$6 \geq 3 \cdot 4 - 6 = 6;$$

тут же доцільно дослідити геометричну незмінюваність фрагментів інтерпретаційних моделей сухожилок колінних суглобів ($S_{21}S_{22}S_{23}S_{24}S_{25}$ та $S_{51}S_{52}S_{53}S_{54}S_{55}$ для правої та лівої ніг відповідно), що розміщуються між великогомілковими й стегновими кістками; для даних фрагментів моделі $V = 5$ та $W = 10$, й умова (1) виконується:

$$10 \geq 3 \cdot 5 - 6 = 9;$$

3) для інтерпретаційних стрижневих моделей стегнових кісток (див. рис. 3.б. та 5), представлених стрижневими системами $S_{24}S_{25}S_{27}S_{28}S_{29}S_{30}$ (для правої ноги) та $S_{54}S_{55}S_{57}S_{58}S_{59}S_{60}$ (для лівої ноги), що містять наступну кількість вузлів та стрижнів $V = 6$ та $W = 12$, умова (1) виконується:

$$12 \geq 3 \cdot 6 - 6 = 12;$$

4) для інтерпретаційної стрижневої моделі тазових кісток (див. рис. 4.б. та 5), представленої стрижневою системою $S_{30}S_{60}S_{61}S_{62}S_{63}S_{64}S_{65}S_{66}S_{67}S_{68}S_{69}S_{70}S_{71}S_{72}$: $V = 14$ та $W = 36$; умова (1) також виконується:

$$36 \geq 3 \cdot 14 - 6 = 36.$$

Очевидно, що хоч кожен фрагмент моделі, який інтерпретує кістки, є геометрично незмінюваним, ОРА людини дозволяє їй займати велике

різноманіття анатомічно правильних поз. Це досягається за рахунок пружності та еластичності м'язів і сухожилків, які мають можливість видовжуватися й скорочуватися. Загалом, обмеження у варіаціях поз обумовлюються кількістю ступенів свободи та допустимими кутами повороту кісток у суглобах, які з точки зору механіки є шарнірними сполученнями. Під час руху, й навіть коли людина стоїть нерухомо, м'язи врівноважують положення усіх елементів її ОРА, скорочуючись і призводячи до виникнення внутрішніх зусиль, що компенсують навантаження від власної ваги тіла та не дають йому втратити баланс. Ці зусилля, у свою чергу, спричиняють появу додаткових внутрішніх сил (окрім тих, що стали наслідком дії гравітації на масу частин тіла) у кістках моделі. При цьому, як правило, організм активізує не одну, а цілі групи м'язів. Зважаючи на те, що м'язам характерна більша пружність та еластичність, а також беручи до уваги те, що вони, на відміну від кісток, не повинні й не можуть працювати на стиск, пропонується інтерпретувати усі м'язи розтяжними ланками, що з механічної точки зору є аналогами тросів і працюють у межах пружних деформацій. Звісно, зважаючи на велику кількість м'язів, що містяться у нижній частині ОРА людини, не всі вони можуть бути включені до моделі, а лише ті, які мають найбільше значення для підтримки стабільних положень людського тіла.

На рисунку 6 продемонстровано модель нижньої частини ОРА людини із нанесеними мінімально необхідними групами м'язів, зображеними умовними дугами (криволінійними лініями), які дозволяють утримувати тіло у стійких положеннях та підтримувати геометричну незмінюваність відповідної інтерпретаційної стрижневої моделі.

Дана модель містить наступну кількість вузлів та ланок (стрижнів та тросів) $V = 72$ та $W = 222$.

Щоправда, серед цих 72 вузлів 22 представляють собою шарнірно-нерухомі опори. А тому для перевірки геометричної незмінюваності конструкції варто застосовувати підхід Максвелла–Кремони для просторових систем [15]. Цей підхід можна виразити наступною формулою, що визначає кінематичну незмінюваність системи:

$$M = 3 \cdot H - W - T - 6, \quad (2)$$

де: M – ступінь рухомості або змінюваності системи; H – кількість шарнірів (вільних вузлів) моделі; W – кількість стрижнів (ланок) моделі; T – кількість реакційних зв'язків із землею/основною; Число 6 – це рухомість “вільного тіла” у просторі (тобто: 3 поступальні плюс 3 обертальні ступені свободи). Якщо $M = 0$ – система вважається кінематично незмінною (або, як ще кажуть, не є механізмом); Якщо $M > 0$ – система є механізмом (оскільки має відмінну від 0 кількість ступенів вільного руху); Якщо $M < 0$ – система є перев'язаною (оскільки має надлишкові зв'язки й сама по собі являється кінематично “перезакріпленою”).

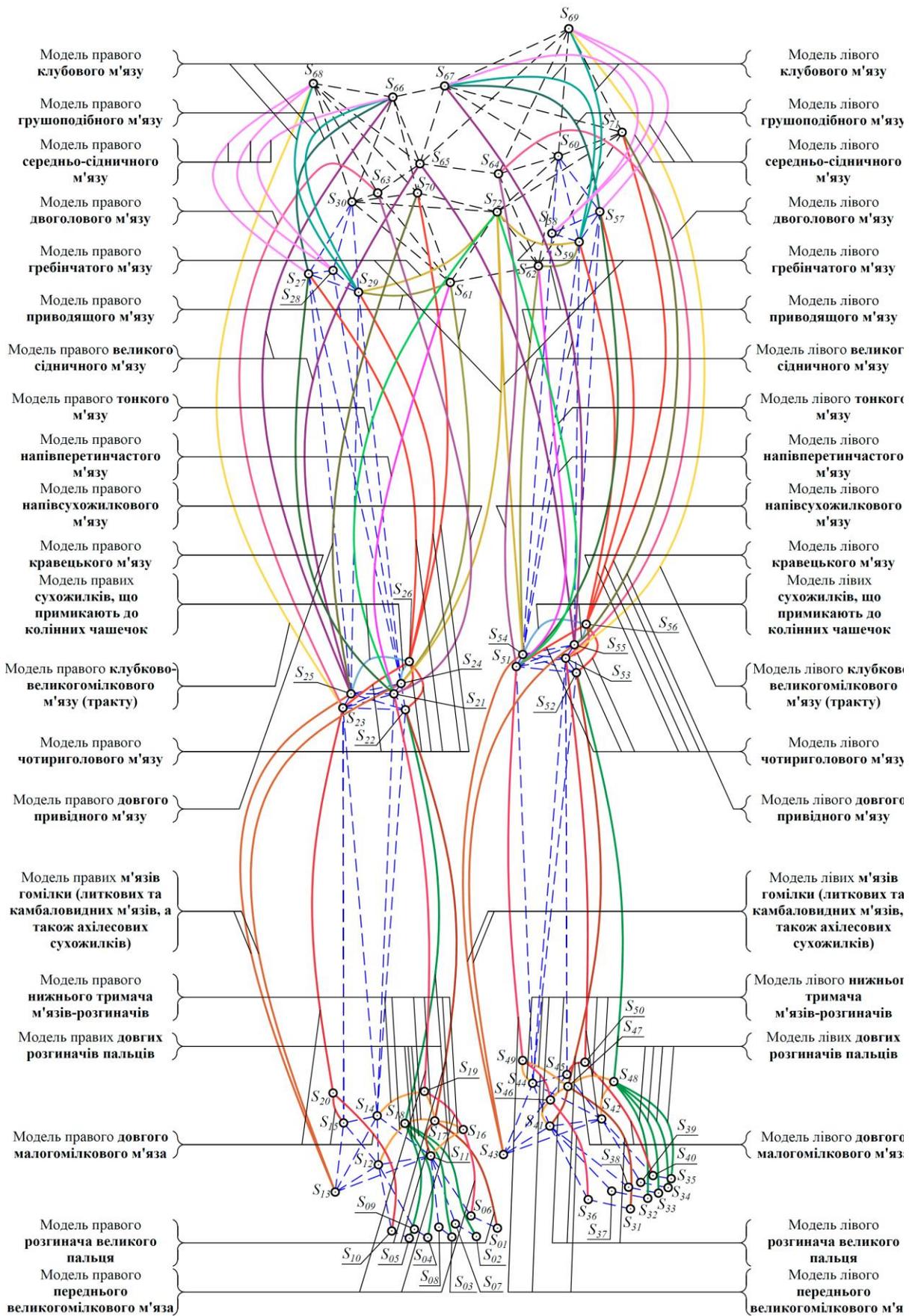


Рис. 6. Інтерпретаційна дискретно представлена модель нижньої частини ОРА людини із усіма елементами, наведеними у таблиці 1

Отже, для наведеної на рисунку 6 дискретно представленої моделі ОРА людини одержимо: $H = V - 22 = 72 - 22 = 50$, $W = 222$, $T = 22 \times 3 = 66$ (оскільки кожна із шарнірно-нерухомих опор дає 3 реакції, забороняючи переміщення уздовж координатних осей Ox , Oy та Oz , але дозволяє обертання). Тоді, згідно з (2) величина M становитиме:

$$M = 3 \cdot 50 - 222 - 66 - 6 = -144 < 0.$$

Це свідчить про те, що дана система має значно більше ланок, а ніж необхідно для її геометричної незмінюваності.

На перший погляд може здатися, що кількість стрижнів/ланок є надмірною, однак, у різних анатомічно правильних позах може бути задіяна різна кількість та комбінація м'язів. Доки одні м'язи задіяні, інші можуть перебувати у розслабленому стані. Іншими словами, так як інтерпретаційна модель має бути універсальною для моделювання будь-яких анатомічно правильних поз нижньої частини людського тіла, топологія цієї моделі має залишатися незмінною (тобто, не можна вилучати і додавати ланки при різних постановках задачі; більше того, людське тіло містить однаковий набір кісток і м'язів незалежно від пози у якій воно перебуває у той чи інший момент). Водночас, слід зазначити, що хоч деякі ланки, які інтерпретують м'язи, могли би й не бути відображеними у даній моделі, однак, це могло би призвести до неможливості здійснення деяких рухів, а також демонструвало би у подальшому некоректний розподіл внутрішніх зусиль у кістках, суглобах і самих м'язах. Не слід забувати, що дана модель побудована для подальшого удосконалення існуючих, а також створення якісно нових, програм фізичної терапії для осіб із надмірною вагою та гонолгіями із застосуванням різноманітних вправ пілатесу. А це у свою чергу вбачає визначення оптимальних шляхів підвищення сили м'язів-стабілізаторів, найважливіші з яких й відображені у моделі.

Для полегшення сприйняття рисунка 6 наведемо таблицю 1, що ілюструє відповідність усіх кісток та м'язів нижньої частини ОРА людини вузлам та ланкам (стрижням та тросам) її інтерпретаційної дискретної моделі. І хоч на рисунку 6 ланки не пронумеровані, втім, у таблиці 1 ці номери наведені для оцінки кількості елементів моделі та їх систематизації.

Таблиця 1. Елементи дискретно представленої моделі нижньої частини ОРА людини

Номера ланок моделі	Назви відповідних кісток, м'язів або сухожилків	Номера вузлів початку і кінця ланок моделі	
1	Кістки фаланги великого пальця правої ноги	01	06
2	М'яз розгинача великого пальця правої ноги	01	17
3	Кістки фаланги вказівного пальця правої ноги	02	07
4	М'яз довгого розгинача вказівного пальця правої ноги	02	18
5	Кістки фаланги середнього пальця правої ноги	03	08
6	М'яз довгого розгинача середнього пальця правої ноги	03	18

Номера ланок моделі	Назви відповідних кісток, м'язів або сухожилків	Номера вузлів початку і кінця ланок моделі	
7	Кістки фаланги підмізинного пальця правої ноги	04	09
8	М'яз довгого розгинача підмізинного пальця правої ноги	04	18
9	Кістки фаланги мізинця правої ноги	05	10
10	М'яз довгого розгинача мізинця правої ноги	05	18
11	Плеснова кістка великого пальця правої ноги	06	11
12	Фрагмент переднього великогомілкового м'яза правої ноги	06	16
13	Плеснова кістка вказівного пальця правої ноги	07	11
14	Плеснова кістка середнього пальця правої ноги	08	11
15	Плеснова кістка підмізинного пальця правої ноги	09	12
16	Плеснова кістка мізинця правої ноги	10	12
17	Фрагмент довгого малогомілкового м'яза правої ноги	10	20
18	Фрагмент заплеснових кісток правої ноги	11	12
19	Фрагмент заплеснових кісток правої ноги	11	13
20	Фрагмент заплеснових кісток правої ноги	11	14
21	Фрагмент нижнього тримача м'язів-розгиначів правої ноги	11	16
22	Фрагмент м'яза розгинача великого пальця правої ноги	11	17
23	Фрагмент заплеснових кісток правої ноги	12	13
24	Фрагмент заплеснових кісток правої ноги	12	14
25	Фрагмент заплеснових кісток правої ноги	12	15
26	Фрагмент нижнього тримача м'язів-розгиначів правої ноги	12	18
27	Фрагмент заплеснових кісток правої ноги	13	14
28	Фрагмент заплеснових кісток правої ноги	13	15
29	Фрагмент м'язів гомілки (литкової та камбалавидної, а також ахіллесового сухожилка) правої ноги	13	24
30	Фрагмент м'язів гомілки (литкової та камбалавидної, а також ахіллесового сухожилка) правої ноги	13	25
31	Фрагмент заплеснових кісток правої ноги	14	15
32	Фрагмент нижнього тримача м'язів-розгиначів правої ноги	14	19
33	Фрагмент великогомілкової кістки правої ноги	14	21
34	Фрагмент великогомілкової кістки правої ноги	14	22
35	Фрагмент великогомілкової кістки правої ноги	14	23
36	Фрагмент довгого малогомілкового м'яза правої ноги	15	20
37	Малогомілкова кістка правої ноги	15	23
38	Фрагмент нижнього тримача м'язів-розгиначів правої ноги	16	17
39	Фрагмент переднього великогомілкового м'яза правої ноги	16	19
40	Фрагмент нижнього тримача м'язів-розгиначів правої ноги	17	18
41	Фрагмент нижнього тримача м'язів-розгиначів правої ноги	17	19
42	Фрагмент м'яза розгинача великого пальця правої ноги	17	22
43	Фрагмент м'яза довгого розгинача пальців правої ноги	18	22
44	Фрагмент переднього великогомілкового м'яза правої ноги	19	21
45	Фрагмент довгого малогомілкового м'яза правої ноги	20	23
46	Малогомілкова кістка правої ноги	21	22
47	Малогомілкова кістка правої ноги	21	23
48	Медіальний меніск правого колінного суглоба	21	24
49	Передня хрестоподібна зв'язка правого колінного суглоба	21	25
50	Фрагмент правого чотириголового м'яза	21	26

Номера ланок моделі	Назви відповідних кісток, м'язів або сухожилків	Номера вузлів початку і кінця ланок моделі	
51	Правий кравецький м'яз	21	27
52	Фрагмент правого приводящого м'язу	21	61
53	Правий напівсухожилковий м'яз	21	63
54	Правий тонкий м'яз	21	72
55	Малогомілкова кістка правої ноги	22	23
56	Медіальна зв'язка правого колінного суглоба	22	24
57	Латеральна зв'язка правого колінного суглоба	22	25
58	Фрагмент правого чотиригодового м'яза	22	26
59	Задня хрестоподібна зв'язка правого колінного суглоба	23	24
60	Латеральний меніск правого колінного суглоба	23	25
61	Фрагмент правого чотиригодового м'яза	23	26
62	Правий клубково-великогомілковий м'яз (тракт)	23	68
63	Права стегнова кістка	24	25
64	Фрагмент правих сухожилок, що примикають до колінної чашечки	24	26
65	Права стегнова кістка	24	27
66	Права стегнова кістка	24	28
67	Права стегнова кістка	24	29
68	Правий приводящий м'яз	24	61
69	Правий гребінчатий м'яз	24	72
70	Фрагмент правих сухожилок, що примикають до колінної чашечки	25	26
71	Права стегнова кістка	25	27
72	Права стегнова кістка	25	29
73	Правий двоголовий м'яз	25	63
74	Правий великий сідничний м'яз	25	65
75	Правий великий сідничний м'яз	25	66
76	Правий довгий привідний м'яз	25	70
77	Фрагмент правого чотиригодового м'яза	26	27
78	Фрагмент правого чотиригодового м'яза	26	29
79	Фрагмент правого чотиригодового м'яза	26	70
80	Права стегнова кістка	27	28
81	Права стегнова кістка	27	29
82	Права стегнова кістка	27	30
83	Правий грушеподібний м'яз	27	66
84	Фрагмент правого середньо-сідничного м'яза	27	68
85	Права стегнова кістка	28	29
86	Права стегнова кістка	28	30
87	Фрагмент правого середньо-сідничного м'яза	28	66
88	Фрагмент правого середньо-сідничного м'яза	28	68
89	Права стегнова кістка	29	30
90	Фрагмент правого приводящого м'язу	29	61
91	Фрагмент правого клубкового м'яза	29	66
92	Фрагмент правого клубкового м'яза	29	68
93	Правий гребінчатий м'яз	29	72
94	Фрагмент правої сторони кісток тазу	30	61

Номера ланок моделі	Назви відповідних кісток, м'язів або сухожилків	Номера вузлів початку і кінця ланок моделі	
95	Фрагмент правої сторони кісток тазу	30	63
96	Фрагмент правої сторони кісток тазу	30	66
97	Фрагмент правої сторони кісток тазу	30	68
98	Фрагмент правої сторони кісток тазу	30	70
99	Фрагмент правої сторони кісток тазу	30	72
100	Кістки фаланги великого пальця лівої ноги	31	36
101	М'яз розгинача великого пальця лівої ноги	31	47
102	Кістки фаланги вказівного пальця лівої ноги	32	37
103	М'яз довгого розгинача вказівного пальця лівої ноги	32	48
104	Кістки фаланги середнього пальця лівої ноги	33	38
105	М'яз довгого розгинача середнього пальця лівої ноги	33	48
106	Кістки фаланги підмізинного пальця лівої ноги	34	39
107	М'яз довгого розгинача підмізинного пальця лівої ноги	34	48
108	Кістки фаланги мізинця лівої ноги	35	40
109	М'яз довгого розгинача мізинця лівої ноги	35	48
110	Плеснова кістка великого пальця лівої ноги	36	41
111	Фрагмент переднього великогомілкового м'яза лівої ноги	36	46
112	Плеснова кістка вказівного пальця лівої ноги	37	41
113	Плеснова кістка середнього пальця лівої ноги	38	41
114	Плеснова кістка підмізинного пальця лівої ноги	39	42
115	Плеснова кістка мізинця лівої ноги	40	42
116	Фрагмент довгого малогомілкового м'яза лівої ноги	40	50
117	Фрагмент заплеснових кісток лівої ноги	41	42
118	Фрагмент заплеснових кісток лівої ноги	41	43
119	Фрагмент заплеснових кісток лівої ноги	41	44
120	Фрагмент нижнього тримача м'язів-розгиначів лівої ноги	41	46
121	Фрагмент м'яза розгинача великого пальця лівої ноги	41	47
122	Фрагмент заплеснових кісток лівої ноги	42	43
123	Фрагмент заплеснових кісток лівої ноги	42	44
124	Фрагмент заплеснових кісток лівої ноги	42	45
125	Фрагмент нижнього тримача м'язів-розгиначів лівої ноги	42	48
126	Фрагмент заплеснових кісток лівої ноги	43	44
127	Фрагмент заплеснових кісток лівої ноги	43	45
128	Фрагмент м'язів гомілки (литкової та камбалавидної, а також ахіллесового сухожилка) лівої ноги	43	54
129	Фрагмент м'язів гомілки (литкової та камбалавидної, а також ахіллесового сухожилка) лівої ноги	43	55
130	Фрагмент заплеснових кісток лівої ноги	44	45
131	Фрагмент нижнього тримача м'язів-розгиначів лівої ноги	44	49
132	Фрагмент великогомілкової кістки лівої ноги	44	51
133	Фрагмент великогомілкової кістки лівої ноги	44	52
134	Фрагмент великогомілкової кістки лівої ноги	44	53
135	Фрагмент довгого малогомілкового м'яза лівої ноги	45	50
136	Малогомілкова кістка лівої ноги	45	53
137	Фрагмент нижнього тримача м'язів-розгиначів лівої ноги	46	47
138	Фрагмент переднього великогомілкового м'яза лівої ноги	46	49

Номера ланок моделі	Назви відповідних кісток, м'язів або сухожилків	Номера вузлів початку і кінця ланок моделі	
139	Фрагмент нижнього тримача м'язів-розгиначів лівої ноги	47	48
140	Фрагмент нижнього тримача м'язів-розгиначів лівої ноги	47	49
141	Фрагмент м'яза розгинача великого пальця лівої ноги	47	52
142	Фрагмент м'яза довгого розгинача пальців лівої ноги	48	52
143	Фрагмент переднього великогомілкового м'яза лівої ноги	49	51
144	Фрагмент довгого малоюмілкового м'яза лівої ноги	50	53
145	Малоюмілкова кістка лівої ноги	51	52
146	Малоюмілкова кістка лівої ноги	51	53
147	Медіальний меніск лівого колінного суглоба	51	54
148	Передня хрестоподібна зв'язка лівого колінного суглоба	51	55
149	Фрагмент лівого чотириголового м'яза	51	56
150	Лівий кравецький м'яз	51	57
151	Фрагмент лівого приводячого м'язу	51	62
152	Лівий напівсухожилковий м'яз	51	64
153	Лівий тонкий м'яз	51	72
154	Малоюмілкова кістка лівої ноги	52	53
155	Медіальна зв'язка лівого колінного суглоба	52	54
156	Латеральна зв'язка лівого колінного суглоба	52	55
157	Фрагмент лівого чотириголового м'яза	52	56
158	Задня хрестоподібна зв'язка лівого колінного суглоба	53	54
159	Латеральний меніск лівого колінного суглоба	53	55
160	Фрагмент лівого чотириголового м'яза	53	56
161	Лівий клубково-великоюмілковий м'яз (тракт)	53	64
162	Ліва стегнова кістка	53	69
163	Фрагмент лівих сухожилок, що примикають до колінної чашечки	54	55
164	Ліва стегнова кістка	54	56
165	Ліва стегнова кістка	54	57
166	Ліва стегнова кістка	54	58
167	Лівий приводячий м'яз	54	59
168	Лівий гребінчатий м'яз	54	62
169	Фрагмент лівих сухожилок, що примикають до колінної чашечки	54	72
170	Ліва стегнова кістка	55	56
171	Ліва стегнова кістка	55	57
172	Лівий двоголовий м'яз	55	59
173	Лівий великий сідничний м'яз	55	65
174	Лівий великий сідничний м'яз	55	67
175	Лівий довгий привідний м'яз	55	71
176	Фрагмент лівого чотириголового м'яза	56	57
177	Фрагмент лівого чотириголового м'яза	56	59
178	Фрагмент лівого чотириголового м'яза	56	71
179	Ліва стегнова кістка	57	58
180	Ліва стегнова кістка	57	59
181	Ліва стегнова кістка	57	60
182	Лівий грушеподібний м'яз	57	67

Номера ланок моделі	Назви відповідних кісток, м'язів або сухожилків	Номера вузлів початку і кінця ланок моделі	
183	Фрагмент лівого середньо-сідничного м'яза	57	69
184	Ліва стегнова кістка	58	59
185	Ліва стегнова кістка	58	60
186	Фрагмент лівого середньо-сідничного м'яза	58	67
187	Фрагмент лівого середньо-сідничного м'яза	58	69
188	Ліва стегнова кістка	59	60
189	Фрагмент лівого приводячого м'язу	59	62
190	Фрагмент лівого клубкового м'язу	59	67
191	Фрагмент лівого клубкового м'язу	59	69
192	Лівий гребінчатий м'яз	59	72
193	Фрагмент лівої сторони кісток тазу	60	62
194	Фрагмент лівої сторони кісток тазу	60	64
195	Фрагмент лівої сторони кісток тазу	60	67
196	Фрагмент лівої сторони кісток тазу	60	69
197	Фрагмент лівої сторони кісток тазу	60	71
198	Фрагмент лівої сторони кісток тазу	60	72
199	Центральний фрагмент кісток тазу	61	62
200	Фрагмент правої сторони кісток тазу	61	63
201	Фрагмент правої сторони кісток тазу	61	70
202	Фрагмент правої сторони кісток тазу	61	72
203	Фрагмент лівої сторони кісток тазу	62	64
204	Фрагмент лівої сторони кісток тазу	62	71
205	Фрагмент лівої сторони кісток тазу	62	72
206	Фрагмент правої сторони кісток тазу	63	65
207	Фрагмент правої сторони кісток тазу	63	68
208	Фрагмент лівої сторони кісток тазу	64	65
209	Фрагмент лівої сторони кісток тазу	64	69
210	Фрагмент правої сторони кісток тазу	65	66
211	Фрагмент лівої сторони кісток тазу	65	67
212	Фрагмент правої сторони кісток тазу	65	68
213	Фрагмент лівої сторони кісток тазу	65	69
214	Центральний фрагмент кісток тазу	66	67
215	Фрагмент правої сторони кісток тазу	66	68
216	Фрагмент правої сторони кісток тазу	66	70
217	Фрагмент лівої сторони кісток тазу	67	69
218	Фрагмент лівої сторони кісток тазу	67	71
219	Фрагмент правої сторони кісток тазу	68	70
220	Фрагмент лівої сторони кісток тазу	69	71
221	Фрагмент правої сторони кісток тазу	70	72
222	Фрагмент лівої сторони кісток тазу	71	72

Наведена у таблиці 1 інформація повністю описує топологію сітчастої інтерпретаційної моделі нижньої частини ОРА людини у дискретній формі, але не надає жодної інформації щодо принципів формування внутрішніх зусиль у стрижнях і ланках даної моделі. Найбільший інтерес

представляють саме значення внутрішніх зусиль у всіх елементах (ланках) моделі, оскільки вони дають можливість оцінити ступінь перевантаженості у суглобах, і в тому числі у колінних.

Визначення внутрішніх зусиль виконується із використанням методів класичної механіки [7, 8] та методів чисельного моделювання компонентів напружено-деформованого стану стрижневих систем [14, 15]. Однак, найпростішим та найбільш наочним із усіх цих методів є метод вирізання вузлів, що може бути застосованим при умові, що усі сполучення ланок моделі є шарнірними, а у самих ланках діють лише поздовжні зусилля без згинальних або крутних моментів [8]. У [14] було продемонстровано використання методу вирізання вузлів для вирішення задачі геометричного формоутворення дискретних образів плоских кривих та просторових оболонки; даний підхід отримав назву статико-геометричного методу прикладної геометрії. У роботі [11] було запропоноване узагальнення статико-геометричного методу, що дозволило застосовувати його не лише для вирішення задач формоутворення, але й водночас прямих задач класичної механіки.

Згідно з [11] для опису статичної рівноваги геометрично незмінюваної просторової сітчастої структури необхідно скласти та розв'язати відносно координат усіх вільних (тобто, незафіксованих) вузлів її дискретної моделі систему з рівнянь рівноваги, які для кожного окремого i -го вузла $S_i(x_i, y_i, z_i)$, що сполучається із n суміжними вузлами, матиме наступний вигляд у векторній формі:

$$\sum_{j=1}^n \bar{R}_{i,j} + \bar{\mathfrak{F}}_i = 0. \quad (3)$$

Тут $\bar{\mathfrak{F}}_i$ та $\bar{R}_{i,j}$ – це відповідно рівнодійний вектор усіх сторонніх сил, прикладених до даного i -го вузла, а також вектор зусилля у довільному стрижні, що сполучає i -й вузол $S_i(x_i, y_i, z_i)$ із j -м вузлом $S_j(x_j, y_j, z_j)$. Вектор $\bar{\mathfrak{F}}_i$ можна записати у наступній формі:

$$\bar{\mathfrak{F}}_i = \mathfrak{F}_{x_i} \cdot \bar{\mathbf{e}}_x + \mathfrak{F}_{y_i} \cdot \bar{\mathbf{e}}_y + \mathfrak{F}_{z_i} \cdot \bar{\mathbf{e}}_z, \quad (4)$$

де вирази \mathfrak{F}_{x_i} , \mathfrak{F}_{y_i} і \mathfrak{F}_{z_i} це проєкції вектора $\bar{\mathfrak{F}}_i$ на осі просторової системи координат.

Вектор зусилля $\bar{R}_{i,j}$ може бути записаний у аналогічній формі:

$$\bar{R}_{i,j} = R_{x_{i,j}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_x + R_{y_{i,j}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_y + R_{z_{i,j}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_z = R_{i,j} \cdot \bar{\delta}_{i,j}, \quad (5)$$

де $R_{x_{i,j}}$, $R_{y_{i,j}}$ та $R_{z_{i,j}}$ – це компоненти вектору $\bar{R}_{i,j}$ у проєкціях на координатні осі, $R_{i,j}$ – абсолютна величина даного зусилля, що визначається за формулою:

$$R_{i,j} = \sqrt{R_{x_{i,j}}^2 + R_{y_{i,j}}^2 + R_{z_{i,j}}^2}, \quad (6)$$

а $\bar{\delta}_{i,j}$ – радіус-вектор, проведений від i -го до j -го вузла, що становить:

$$\bar{\delta}_{i,j} = [(x_j - x_i) \cdot \bar{\mathbf{e}}_x + (y_j - y_i) \cdot \bar{\mathbf{e}}_y + (z_j - z_i) \cdot \bar{\mathbf{e}}_z] / \delta_{i,j}. \quad (7)$$

У даній рівності $\delta_{i,j}$ – це абсолютна величина радіус-вектору $\bar{\delta}_{i,j}$, яка представляє собою довжину стрижня або ланки між i -м та j -м вузлами й визначається за наступною формулою:

$$\delta_{i,j} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}. \quad (8)$$

У формулах (4), (5) та (7) вектори $\bar{\mathbf{e}}_x$, $\bar{\mathbf{e}}_y$, та $\bar{\mathbf{e}}_z$ – базисні одиничні вектори просторової системи координат.

Тотожність (3) може бути переписана у формі системи рівнянь, одержаних шляхом проєкціювання її векторних компонентів на координатні осі Ox , Oy і Oz :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n R_{x_{i,j}} + \bar{\mathfrak{T}}_{x_i} = 0, \\ \sum_{j=1}^n R_{y_{i,j}} + \bar{\mathfrak{T}}_{y_i} = 0, \\ \sum_{j=1}^n R_{z_{i,j}} + \bar{\mathfrak{T}}_{z_i} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Однак, беручи до уваги формули (4), (5) та (7), тотожність (3) може бути переписана у розгорнутій формі наступним чином:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n (x_j - x_i) \cdot R_{i,j} / \delta_{i,j} + \bar{\mathfrak{T}}_{x_i} = 0, \\ \sum_{j=1}^n (y_j - y_i) \cdot R_{i,j} / \delta_{i,j} + \bar{\mathfrak{T}}_{y_i} = 0, \\ \sum_{j=1}^n (z_j - z_i) \cdot R_{i,j} / \delta_{i,j} + \bar{\mathfrak{T}}_{z_i} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Система рівнянь (10) визначає стан статичної рівноваги деякого i -го вільного вузла сітчастої структури, незалежно від її типу, будь то стрижнева конструкція, чи комбінована система зі стрижнів та ланок/тросів типу тенсегриті або біотенсегриті. Загальна система рівнянь типу (10), складена для усіх вільних вузлів моделі, повністю описує стан її статичної рівноваги під дією зовнішніх навантажень.

Водночас, якщо розв'язувати дану систему рівнянь відносно координат вільних вузлів моделі, за умови, що значення усіх вузлових навантажень $\bar{\mathfrak{T}}_i$ та внутрішніх зусиль $\bar{R}_{i,j}$ у ланках відомі, то задача приводиться до формоутворення даної моделі під дією зовнішніх та внутрішніх сил. Такі задачі набули значного поширення у багатьох технічних галузях, зокрема у механіці, архітектурі та промисловому дизайні. Їх основною метою є

визначення оптимальних форм деякої конструкції, яка має працювати під дією зовнішніх та внутрішніх впливів різноманітної природи. Заради справедливості слід зазначити, що розв'язання такої загальної системи рівнянь є досить складним завданням у зв'язку із її високою нелінійністю. Тож, для того, щоб спростити процес формоутворення інженери та науковці вдаються до так ітераційних методів розв'язання вищезгаданих систем. Для спрощення розрахунків (шляхом зв'язування параметрів моделювання) вводять додатковий розрахункий параметр $\aleph_{i,j}$, який являє собою відношення значень абсолютного зусилля $R_{i,j}$ у стрижнях та ланках моделі до їх довжин $\delta_{i,j}$:

$$\aleph_{i,j} = R_{i,j} / \delta_{i,j}. \quad (11)$$

Така підстановка дозволяє на початковій стадії формоутворення задатися припущенням щодо очікуваних величин внутрішніх зусиль у елементах моделі, а потім на проміжних етапах розрахунків уточнювати ці значення. Однак, ще частіше, під час формоутворення, значення усіх $\aleph_{i,j}$ задаються сталими, як апіорно задана інформація, і на основі цього отримується форма моделі із пропорційним розподілом внутрішніх зусиль по відношенню до довжин її елементів. Підставляючи параметр $\aleph_{i,j}$ з тотожності (11) до системи (10), отримаємо наступну її модифіковану форму:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n (x_j - x_i) \cdot \aleph_{i,j} + \mathfrak{F}_{x_i} = 0, \\ \sum_{j=1}^n (y_j - y_i) \cdot \aleph_{i,j} + \mathfrak{F}_{y_i} = 0, \\ \sum_{j=1}^n (z_j - z_i) \cdot \aleph_{i,j} + \mathfrak{F}_{z_i} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Після ітераційного розв'язання системи рівнянь типу (12) відносно координат вільних вузлів моделі, визначення внутрішніх зусиль $R_{i,j}$ у її елементах вже не представляє жодних складнощів, оскільки може бути здійснене виходячи з тотожності (11), а саме за формулою:

$$R_{i,j} = \aleph_{i,j} \cdot \delta_{i,j}. \quad (13)$$

Таким чином, припущення (11) стає апіорною формоутворюючою умовою.

У випадку ж, коли мова йде про моделювання нижньої частини ОРА людини, ми не можемо собі дозволити вирішувати задачу формоутворення на основі припущень щодо величин розподілу внутрішніх зусиль по відношенню до довжин фрагментів інтерпретаційної моделі кісток та м'язів, оскільки саме ці внутрішні зусилля й цікавлять нас найбільше і в першу чергу тому, що ці зусилля дозволяють зрозуміти, на скільки

перевантаженими є кістки та суглоби. Відтак, при описі роботи моделі необхідно, щоб величини внутрішніх зусиль R_{ij} або параметри \aleph_{ij} також були невідомими і визначалися в процесі моделювання.

Для того, щоб забезпечити виконання даної вимоги, проаналізуємо, які саме сили спричиняють виникнення загальних внутрішніх зусиль у стрижнях та ланках моделі, що інтерпретують кістки та м'язи відповідно. Внутрішні зусилля R_{ij} є результатом дії на вузли моделі двох типів сил:

1) зовнішніх сил, що інтерпретують силу впливу гравітаційного поля Землі на масу окремих частин тіла людини; дані сили позначаються векторами \vec{F}_i для кожного i -го вільного вузла моделі;

2) внутрішні зусилля (позначатимемо їх як λ_{ij} для довільного стрижня або ланки, що сполучає i -й та j -й вузли), спричинені скороченням м'язів для стабілізації того чи іншого положення ОРА людини.

Якщо позначити абсолютну величину того компоненту, який є наслідком протидії силі тяжіння, як P_{ij} , то абсолютну величину результуючого зусилля у відповідному стрижні або ланці можна буде записати наступним чином:

$$R_{i,j} = P_{i,j} + \lambda_{i,j}. \quad (14)$$

В дійсності, називати величини R_{ij} , P_{ij} та λ_{ij} абсолютними не зовсім коректно, адже елементи моделі можуть працювати як на стиск, так і на розтяг, що в свою чергу може надавати усім цим величинам як від'ємного, так і додатного значень. Більше того, у деяких позах ОРА величини P_{ij} та λ_{ij} можуть взаємно компенсуватися призводячи до того, що величина R_{ij} буде дорівнювати 0.

З точки зору класичної механіки система, у якій виникають не лише внутрішні зусилля P_{ij} , як наслідок зовнішніх впливів, але й внутрішні зусилля λ_{ij} , є системою, що містить попередньо напружені елементи. Тепер, розуміючи це, сформулюємо умови, які необхідно накласти на відповідну модель для того, щоб її рівновага була стабільною під дією зовнішніх та внутрішніх зусиль, а також щоб кількість рівнянь системи рівноваги відповідала кількості невідомих. Перш за все, зазначимо, що умовою стабільності ОРА людини у кожній позі має бути незмінність довжин δ_{ij} усіх стрижнів та ланок її інтерпретаційної моделі у кожній із цих поз. Тоді загальна геометрична незмінюваність моделі забезпечується її топологією та достатньою кількістю опорних вузлів. Таким чином, зважаючи на формулу (14), а також на необхідність збереження довжин δ_{ij} рівними сталим наперед визначеним величинам $\delta_{0\ i,j} = \text{const}_{i,j}$, система рівнянь рівноваги деякого i -го вільного вузла, сполученого із суміжними n вузлами, набуде наступного вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n (x_j - x_i) \cdot (P_{i,j} + \lambda_{i,j}) / \delta_{i,j} + \mathfrak{F}_{x_i} = 0, \\ \sum_{j=1}^n (y_j - y_i) \cdot (P_{i,j} + \lambda_{i,j}) / \delta_{i,j} + \mathfrak{F}_{y_i} = 0, \\ \sum_{j=1}^n (z_j - z_i) \cdot (P_{i,j} + \lambda_{i,j}) / \delta_{i,j} + \mathfrak{F}_{z_i} = 0, \\ \delta_{i,j} = \delta_{0_{i,j}}. \quad (j = \overline{1, n}) \end{array} \right. \quad (15)$$

З системи рівнянь (15) очевидно, що у разі, якщо невідомими є і $P_{i,j}$, і $\lambda_{i,j}$ кількість рівнянь буде на n меншим, ніж кількість невідомих. Для того, щоб це виправити, можна скористатися тим же математичним прийомом, що й при геометричному формоутворенні, а саме зв'язати внутрішні зусилля $P_{i,j}$, що виникають під дією сили тяжіння, та довжини $\delta_{i,j}$ стрижів чи ланок, у яких ці зусилля виникають:

$$\mathfrak{N}_{P_{i,j}} = P_{i,j} / \delta_{i,j}. \quad (16)$$

При цьому, параметри $\mathfrak{N}_{P_{i,j}}$ доцільно задавати сталими перед початком кожної ітерації процесу числення та перевизначати перед кожним наступним ітераційним циклом, передбачаючи, що їхні значення будуть у подальшому урівноважені параметрами $\mathfrak{N}_{\lambda_{i,j}}$ – відношенням $\lambda_{i,j}$ до $\delta_{i,j}$:

$$\mathfrak{N}_{\lambda_{i,j}} = \lambda_{i,j} / \delta_{i,j}. \quad (17)$$

Таким чином, беручи до уваги формули (11), (14), (16) та (17), $\mathfrak{N}_{i,j}$ набуває наступної форми:

$$\mathfrak{N}_{i,j} = \mathfrak{N}_{P_{i,j}} + \mathfrak{N}_{\lambda_{i,j}}. \quad (18)$$

Також, зважаючи на рівності (16) та (17), а також (18), система (15) може бути переписана наступним чином:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n (x_j - x_i) \cdot (\mathfrak{N}_{P_{i,j}} + \mathfrak{N}_{\lambda_{i,j}}) + \mathfrak{F}_{x_i} = 0, \\ \sum_{j=1}^n (y_j - y_i) \cdot (\mathfrak{N}_{P_{i,j}} + \mathfrak{N}_{\lambda_{i,j}}) + \mathfrak{F}_{y_i} = 0, \\ \sum_{j=1}^n (z_j - z_i) \cdot (\mathfrak{N}_{P_{i,j}} + \mathfrak{N}_{\lambda_{i,j}}) + \mathfrak{F}_{z_i} = 0, \\ \delta_{i,j} = \delta_{0_{i,j}}. \quad (j = \overline{1, n}) \end{array} \right. \quad (19)$$

Якщо вважати, що параметри $\mathfrak{N}_{P_{i,j}}$ приймаються сталими, то загальна кількість рівнянь системи рівноваги моделі r у будь-якій статичній позі

дорівнюватиме сумі кількості координат вільних вузлів та параметрів $\aleph_{\lambda_{i,j}}$ й скрадатиметься із суми потроєної кількостей усіх вільних вузлів $3 \cdot w$ та кількості усіх стрижнів і ланок моделі v :

$$r = 3 \cdot w + v. \quad (20)$$

Таким чином, кількість невідомих дорівнюватиме кількості рівнянь, роблячи останню квадратною.

Однак, на даному етапі, запишемо дану систему без урахування формули (17):

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n (x_j - x_i) \cdot (\aleph_{P_{i,j}} + \lambda_{i,j} / \delta_{i,j}) + \mathfrak{F}_{x_i} = 0, \\ \sum_{j=1}^n (y_j - y_i) \cdot (\aleph_{P_{i,j}} + \lambda_{i,j} / \delta_{i,j}) + \mathfrak{F}_{y_i} = 0, \\ \sum_{j=1}^n (z_j - z_i) \cdot (\aleph_{P_{i,j}} + \lambda_{i,j} / \delta_{i,j}) + \mathfrak{F}_{z_i} = 0, \\ \delta_{i,j} = \delta_{0_{i,j}} \cdot (j = \overline{1, n}) \end{cases} \quad (21)$$

Для того, щоб у подальшому краще розуміти природу зв'язку перших трьох та четвертого рівняння системи (21), перепишемо її ще раз, відкривши другі дужки під знаками сум:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \{ (x_j - x_i) \cdot \aleph_{P_{i,j}} + [(x_j - x_i) / \delta_{i,j}] \cdot \lambda_{i,j} \} + \mathfrak{F}_{x_i} = 0, \\ \sum_{j=1}^n \{ (y_j - y_i) \cdot \aleph_{P_{i,j}} + [(y_j - y_i) / \delta_{i,j}] \cdot \lambda_{i,j} \} + \mathfrak{F}_{y_i} = 0, \\ \sum_{j=1}^n \{ (z_j - z_i) \cdot \aleph_{P_{i,j}} + [(z_j - z_i) / \delta_{i,j}] \cdot \lambda_{i,j} \} + \mathfrak{F}_{z_i} = 0, \\ \delta_{i,j} = \delta_{0_{i,j}} \cdot (j = \overline{1, n}) \end{cases} \quad (22)$$

Система рівнянь (22), записана по відношенню до кожного з вільних вузлів моделі із урахуванням умов незмінності довжин інцидентних їм ланок представлятиме собою повну систему рівноваги, форми та положення досліджуваної моделі.

Розв'язуючи відповідну повну систему рівнянь відносно координат усіх вільних вузлів, а також параметрів $\lambda_{i,j}$, можна визначити внутрішні зусилля $R_{i,j}$ у кожній ланці моделі. Для цього слід скористатися наступною формулою, що одержується шляхом підстановки величини внутрішнього зусилля $P_{i,j}$, вираженого з виразу (16) до рівності (14):

$$R_{i,j} = \aleph_{P_{i,j}} \cdot \delta_{i,j} + \lambda_{i,j}. \quad (23)$$

Хоч система, складена на основі рівнянь (22) є повною та містить ту ж кількість рівнянь, що й невідомих, та все ж у подальших дослідженнях слід розглянути сітчасту інтерпретаційну модель, як результат умовної оптимізації багатокomпонентної системи. Це дозволить продемонструвати правильність одержаної системи з механічної точки зору, довести її застосовність по відношенню до задачі моделювання компонентів напружено-деформованого стану ОРА, а також підтвердити повноту щодо врахування усіх умов стійкості та геометричної незмінюваності моделі.

Висновки. У роботі продемонстровано порядок побудови сітчастої інтерпретаційної моделі нижньої частини ОРА людини та сформульовано систему рівнянь статичної рівноваги її вільних вузлів. Запропонований підхід дозволяє визначати внутрішні зусилля у елементах, що інтерпретують кістки, м'язи та сухожилки моделі, з урахуванням дії сили тяжіння на усі фрагменти тіла, а також беручи до уваги додаткові сили, які виникають внаслідок м'язових скорочень.

Отримані результати створюють інженерне підґрунтя й дають інструментальну базу для подальшого моделювання компонентів напружено-деформованого стану елементів нижньої частини ОРА людського тіла, аналізу перевантажень у колінних та суміжних суглобах, а також для вдосконалення програм терапії й реабілітації, зокрема у осіб із надмірною масою тіла і ожирінням.

У подальших дослідженнях доцільно розглянути побудову повної сітчастої інтерпретаційної моделі ОРА людини, що включатиме також її тулуб та верхні кінцівки.

Література

1. Fuller R. B. Synergetics: Explorations in the Geometry of Thinking. New York: Macmillan, 1975. 876 p.
2. Snelson K. Continuous tension, discontinuous compression structures. U.S. Patent No. 3,169,611, 1965.
3. Pugh A. An Introduction to Tensegrity. Berkeley: University of California Press, 1976. 118 p.
4. Motro R. Tensegrity: Structural Systems for the Future. London: Kogan Page Science, 2003. 220 p.
5. Levin S. A suspensory system for the sacrum in pelvic mechanics: Biotensegrity. Journal of Bodywork and Movement Therapies, 2007. DOI: 10.1016/B978-044310178-6.50017-7.
6. International Journal of Space Structures. Special Issue on Tensegrity Structures. Vol. 11, No. 1–2, 1996.
7. Ковальчук В. П., Ковальчук Л. В. Будівельна механіка : підручник для студентів вищих навчальних закладів. — Київ : Ліра-К, 2011. — 504 с.
8. Ковальчук В. П., Ковальчук Л. В. Будівельна механіка. Стрижневі системи : підручник для студентів вищих навчальних закладів. —

Київ : Ліра-К, 2010. 432 с.

9. Лехницький С. Г. Теорія пружності анізотропного тіла. — Київ : Наукова думка, 1981. 432 с.

10. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The Finite Element Method. 6th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2005. 631 p.

11. Скочко В. І. Методи інтерпретаційного геометричного моделювання сітчастих структур та їх застосування : дис. ... канд. техн. наук. Київ: КНУБА, 2021. 277 с.

12. Корн Г., Корн Т. Математичний довідник для інженерів / пер. з англ. — Київ : Наукова думка, 1974. 832 с.

13. Писаренко Г. С., Кочанов Ю. М., Матвєєв В. В. Механіка деформівного твердого тіла : підручник для студентів інженерних спеціальностей. — Київ : Либідь, 1993. 560 с.

14. Ковальов С. М. та ін. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Спеціальні розділи. Вип. 1 / за ред. В. Є. Михайленка. Луцьк: Редакційно-видавничий відділ ЛДТУ, 2006. 256 с.

15. Баженов В. А., Перельмутер А. В., Шмуклер В. С. Будівельна механіка : підручник для студентів будівельних спеціальностей вищих навчальних закладів. – Київ : Каравела, 2007. 456 с.

References

1. Fuller, R. B. Synergetics: Explorations in the Geometry of Thinking. New York: Macmillan, 1975. 876 p.

2. Snelson, K. Continuous Tension, Discontinuous Compression Structures. U.S. Patent No. 3,169,611, 1965.

3. Pugh, A. An Introduction to Tensegrity. Berkeley: University of California Press, 1976. 118 p.

4. Motro, R. Tensegrity: Structural Systems for the Future. London: Kogan Page Science, 2003. 220 p.

5. Levin, S. A suspensory system for the sacrum in pelvic mechanics: Biotensegrity. Journal of Bodywork and Movement Therapies, 2007. DOI: 10.1016/B978-044310178-6.50017-7.

6. International Journal of Space Structures. Special Issue on Tensegrity Structures, Vol. 11, No. 1–2, 1996.

7. Kovalchuk, V. P., Kovalchuk, L. V. Structural Mechanics: textbook for students of higher education institutions. Kyiv: Lira-K, 2011. 504 p.

8. Kovalchuk, V. P., Kovalchuk, L. V. Structural Mechanics. Bar Systems: textbook for students of higher education institutions. Kyiv: Lira-K, 2010. 432 p.

9. Lekhnitskii, S. G. Theory of Elasticity of an Anisotropic Body. Kyiv: Naukova Dumka, 1981. 432 p.

10. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. The Finite Element Method. 6th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2005. 631 p.

11. Skochko, V. I. Methods of Interpretive Geometric Modeling of Mesh Structures and Their Applications: PhD thesis in Technical Sciences. Kyiv: Kyiv National University of Construction and Architecture, 2021. 277 p.
12. Korn, G., Korn, T. Mathematical Handbook for Engineers. Translated from English. Kyiv: Naukova Dumka, 1974. 832 p.
13. Pysarenko, H. S., Kochanov, Yu. M., Matvieiev, V. V. Mechanics of Deformable Solids: textbook for engineering students. Kyiv: Lybid, 1993. 560 p.
14. Kovalov, S. M. et al. Applied Geometry and Engineering Graphics. Special Sections. Issue 1. Edited by V. Ye. Mykhailenko. Lutsk: Publishing Department of Lutsk State Technical University, 2006. 256 p.
15. Bazhenov, V. A., Perelmuter, A. V., Shmukler, V. S. Structural Mechanics: textbook for students of construction specialties of higher education institutions. Kyiv: Karavela, 2007. 456 p.

Ph.D. Student, Teacher, **Olha KUCHERIAVA**
 kutcheriava.olha@gmail.com, ORCID: 0009-0003-3260-2903
 National University of Ukraine on Physical Education and Sport

Dr.Sc. (Eng.), Professor, Head of the Special Purpose Structures Department,
Volodymyr SKOCHKO
 volodymyr.work.pro@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1709-2621
 Kyiv National University of Construction and Architecture

Ph.D. Student, Assistant of the Special Purpose Structures Department,
Andrii POSIKERA,
 posikera142@gmail.com, ORCID: 0009-0003-3989-2704
 Kyiv National University of Construction and Architecture

STATIC EQUILIBRIUM OF NODES IN A BIOTENSEGRITY MODEL OF THE HUMAN MUSCULOSKELETAL SYSTEM

The study is devoted to the investigation of the mathematical conditions of static equilibrium of nodes in a discretely represented interpretive biotensegrity model of the human musculoskeletal system (MSS). The relevance of this topic is determined by the need for a formalized mathematical description of the joint mechanical behavior of bones, muscles, and tendons forming the lower part of the human body, considered as a mechanical system subjected to prescribed gravitational loads. Such a description makes it possible to construct a model that, in turn, enables the determination of internal forces in all its elements through discrete geometric modeling.

The model is based on the concept of geometrically invariant mesh structures, in which each element, within a mechanical interpretation, works exclusively in compression or tension, thus preventing the occurrence of bending or torsional moments due to the hinged connections between the corresponding

elements. At the same time, the model possesses the properties of spatial tensegrity structures, in which all compressed elements are represented by struts, while all tensioned elements are represented by cables. When applied to biomechanical problems, this approach describes the behavior of so-called biotensegrity models of the musculoskeletal system. The present study is a logical continuation of previous research on the principles of forming geometrically stable mesh structures through their step-by-step kinematic analysis.

Based on the concept of self-equilibrated mesh structures, a system of static equilibrium equations has been formulated for the free nodes of spatial biotensegrity models. This system allows for the determination of the interaction between compressive and tensile elements within the limits of their elastic deformation under applied nodal loads. The specific features of constructing the corresponding equations for discrete systems with prestressed elements are also considered.

It is demonstrated that the application of methods of applied geometry, combined with the principles governing classical mechanical systems, ensures a correct mathematical interpretation of the functioning of the human musculoskeletal system. The obtained results provide a foundation for further numerical studies, including the modeling and analysis of stress–strain state components of the interpretive model elements, their step-by-step optimization, and their application in problems of biomechanics, physical therapy, and rehabilitation.

Keywords: biotensegrity, nodal static equilibrium equations, interpretive mesh structure, musculoskeletal system, physical therapy, rehabilitation, discrete geometric modeling.