

АНАЛІЗ ОСОБЛИВОСТЕЙ ГЕОМЕТРІЇ РІЗНОВИДІВ СПРАЛЬНИХ ФОРМ

Дана робота присвячена актуальному питанню аналізу геометричних особливостей та висвітленню математичного опису спіралі Корню (клотоїди) та деяких видів синусоїдальних спіралей, а саме кардіоїди, лемніскати Бернуллі та спіралі Галілея. Розглянуто їх теоретичні і практичні аспекти, висвітлено математичний опис у вигляді рівнянь в параметричній формі та в різних аспектах подання для зручності проведення досліджень. Побудовано геометричні моделі вказаних видів спіралей, проаналізовано їх геометричні властивості, висвітлено сфери та напрямки застосування у практичній діяльності людини. Проведено геометричне моделювання форми лемніскати Бернуллі за рахунок введення у полярне рівняння додаткових параметрів, які дозволяють трансформувати форму кривої, отримати множину геометричних рішень, розширюючи можливості класичної форми. Показано, що завдяки своїм геометричним особливостям спіралі широко використовуються для моделювання ліній і поверхонь s- подібної форми, а також для формування перехідних кривих залізничних колій, автомобільних доріг, різного виду атракціонів тощо. Геометрично доведено, що форми корпусів, завитків та вирізів у музичних струнних інструментів виконуються за клотоїдою, що дозволяє отримувати дивне м'яке, співуче звучання, яке зачаровує своєю мелодійністю. В статті змодельована схема траєкторії падіння каміння з висоти у експерименті Галілея, який доводить, що траєкторія руху тіла під дією своєї ваги являє собою частину спіралі Галілея. Показано, що одним із практичних напрямів використання кардіоїди є мікрофони, які використовуються при записи вокалу в студіях звукозапису. Крім вказаного звернено увагу, що синусоїдальні криві можуть бути використаними в механіці, геодезії та при вивченні каустик. Відзначено, що спіральні форми часто використовуються в машинобудуванні, в автомобільній та авіаційній аеродинаміці, а також у комп'ютерному моделюванні для плавного з'єднання траєкторій зі змінною кривизною. У багатьох гілках машинобудівної промисловості застосовуються спіралі Галілея для проектування механізмів, де потрібна зміна швидкості.

Ключові слова: спіральні форми, геометрична модель; теоретичні аспекти; спіраль Корню; синусоїдальні спіралі; практичне застосування.

Постановка проблеми. Природне середовище, яке оточує людину, уявляє собою сукупність геометричних форм, ліній і поверхонь. Спіральні лінії завжди викликали інтерес у зв'язку з їх химерною формою, яка є розповсюдженою у природі. Спостереження за закономірностями навколишнього середовища, вивчення природних форм утворення спіралей, вміння узагальнити отриману інформацію дає змогу розробки теоретичного апарату щодо геометричного моделювання нових об'єктів та впровадження змодельованих форм і нових технологій у створенні об'єктів різних галузей виробництва.

Спіральні лінії відносяться до фундаментальних геометричних об'єктів, які широко використовуються в різних галузях науки і техніки. Вони застосовуються в геометрії, інженерній графіці, фізиці та інших прикладних науках. Особливий інтерес до вивчення властивостей спіралей пов'язаний з їх унікальними геометричними властивостями, що дозволяють описувати процеси рівномірного та нерівномірного змінення відстані від фіксованої точки або осі. Щодо застосування в промисловості, то спіралі використовуються зокрема при проектуванні механічних елементів, архітектурних конструкцій, аеродинамічних поверхонь тощо.

Розвиток комп'ютерних технологій та поява автоматизованих систем проектування дозволили використовувати математичні моделі спіральних форм для створення нових складних просторових об'єктів завдяки специфічним геометричним властивостям спіралей. Тому дослідження геометричних особливостей спіральних кривих уявляє собою актуальну тематику особливо під час пошуку нових підходів до розв'язання наукових та прикладних задач.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Геометричні властивості різних кривих ліній та поверхонь, що існують у природному середовищі, зокрема спіральних кривих багато років є цікавими для математиків і теоретичних дослідників оскільки є необхідність у ґрунтовному вивченні та детальному описі природних ліній з метою надання можливості удосконалення існуючих геометричних форм шляхом їх моделювання та для створення нових сучасних форм і конструкцій. В літературних джерелах достатньо широко представлено сучасні дослідження цієї тематики. Наприклад, вже багато років проводяться дослідження властивостей геометричних поверхонь різних форм вченими-геометрами Київської школи прикладної геометрії: докт. техн. наук Ковальовим С.М., докт. техн. наук Ботвіновською С.І., канд. техн. наук Золотовою А.В. та іншими. У роботах [1, 2, 3] розвиваються теоретичні, методологічні і практичні аспекти щодо властивостей різноманітних кривих ліній та поверхонь, наводяться геометричні особливості управління формою геометричних кривих. В основу досліджень покладено статико-геометричний метод С.М. Ковалева для дослідження геометричних

аспектів питання формоутворення дискретних каркасів поверхонь. Проводиться параметричний аналіз задач геометричного моделювання дискретних каркасів плоских кривих ліній та розв'язуються інші геометричні задачі з урахуванням вимог сучасних виробництв.

Узагальнення статико-геометричного методу для побудови дискретних каркасів поверхонь запропоновано у роботах [4, 5], де продемонстровано можливість створення нових поверхонь-образів за рахунок використання конструктивного розподілу зовнішнього формоутворюючого навантаження на вузли дискретної сітки, яку нанесено на цю поверхню. Такий підхід допомагає прогнозувати різні естетичні характеристики образу та переносити на модельовані поверхні властивості обраних аналітично заданих поверхонь-прообразів. Пропонується використання найпростішого проєктивного перетворення, а саме просторового перспективного перетворення для моделювання дискретних каркасів. Використання такого методу у вигляді просторової гомології може слугувати ефективним засобом появи нових кривих ліній і поверхонь, та вивчення їх властивостей.

Наукова стаття [6] присвячена методам геометричного моделювання та оптимізації конструктивних елементів куполів. Автори розглядають дискретизацію поверхонь для створення раціональних каркасів шляхом розробки алгоритмів формування геометричних моделей дискретних каркасів для купольних споруд з метою оптимізації їх конструкції.

Теоретичні питання застосування геометричних перетворень для моделювання дискретних каркасів розглянуто в роботах [7, 8], де запропоновано метод конхoidalного перетворення, який дозволяє формувати нові криволінійні об'єкти на основі опорних контурів, забезпечуючи створення дискретних моделей оболонок із заданими композиційними властивостями. Роботи спрямовані на розширення можливостей використання комп'ютерних геометричних методів для моделювання поверхонь.

Аналізу геометричних властивостей кривих ліній та поверхонь різних класів та форм присвячені роботи [9, 10, 11], в яких проведено теоретичне дослідження та надано математичний опис кривих та поверхонь; побудовано їх геометричні моделі, створено схеми графічного формоутворення та алгоритми побудови ліній та криволінійних поверхонь. Показано, що завдяки своїм геометричним особливостям лінії та поверхні різної форми широко використовуються в багатьох напрямках людської діяльності, зокрема в корабле- та машинобудуванні, будівництві та архітектурі. Розглянуто можливість розширення сфери використання досліджуваних геометричних об'єктів за рахунок впровадження у виробництво нових наукових розробок.

Але потрібно відзначити, що не всі види спіральних форм було досліджено в повній мірі, тому уявляє інтерес продовжити аналіз геометричних особливостей спіральних форм.

Ціль статті. Провести аналіз геометричних особливостей спіралі Корню та синусоїдальних спіралей, дослідити їх математичні властивості та побудувати геометричні моделі, підібрати найбільш характерні приклади та визначити сфери можливого застосування в різних галузях.

Основна частина. Спіраль – це одна із найкрасивіших кривих ліній, що створила природа, вона має множини видів, які відрізняються геометричним описом і формою, але всі мають нескінченні закручені завитки. Спіральні форми можна спостерігати у багатьох природних прикладах у явному та уявному вигляді. Спіральний рух повітря часто зустрічається як у високих шарах атмосфери (рис. 1), так і біля поверхні Землі, зокрема в пустині Сахара спостерігаються формування земної поверхні у вигляді спіралей (рис. 2). У природі – все оптимально, саме тому людина вивчає природні явища, виявляє геометричні закономірності, досліджує їх математично та впроваджує виявлені принципи у нові цікаві розробки, які використовуються в різних галузях науки, техніки та господарської діяльності.



Рис. 1. Природні спіралі, що утворюються в повітрі

Рис. 2. Формування поверхні Земної кулі у вигляді спіралей

За свою красу спіральні форми використовуються для прикрашення різних конструкцій. Мабуть найбільш розповсюдженою для прикрашення спіральна крива зустрічається в архітектурних спорудах різних часів та стилів. Саме спіральні форми, як найбільш красиві та привабливі, використовуються протягом багатьох століть для всіх трьох архітектурних ордерів: доричного, іонічного та коринфського. Наприклад, побудований у XVI сторіччі музей Ватикану оформлений пілястрами та колонами, що прикрашені в верхній частині спіральними кривими (рис. 3) у вигляді завитків. А якщо розглядати функціональне призначення елементів архітектурної споруди, то часто опори для монолітних або окремо розташованих конструкцій можуть бути також оформлені у вигляді спіральних форм (рис. 4).



Рис. 3. Прикрашення колон і пілястрів спіральними завитками (музей Ватикану)



Рис. 4. Консоли та різьблені мармурові опори у вигляді спіральних кривих або у формі завитків (волют) (музей Ватикану)

Іноді за її особливу незвичайну форму спіральну криву вибирають у якості логотипу для деяких фірм (рис. 5).

Спіраль – це одна із форм проявлення руху, росту та розвитку життя. Стебла та гілки рослин витягуються описуючи форму спіралі (рис.6), рухаючись за спіраллю розкриваються пелюстки деяких квітів, розгортуються пагони папороті тощо. Таке спіральне розташування дає потужну динаміку зростання та енергоємності, робить рівномірною інсоляцію (споживання сонячного світла та енергії) для рослин. Форми природної конструкції у вигляді спіралі призводять до стійкості у просторі та появи додаткової жорсткості у стеблах рослин.



Рис. 5. Логотип фірми у вигляді спіралі



Рис. 6. Розташування гілок рослин за спіраллю

Сутність технічних форм у вигляді спіралі (рис.7) полягає у тому, що спіральні форми дозволяють протяжну форму зробити більш компактною, сприяють зміцненню всієї конструкції, завдають коловий напям закручування потоку робочої речовини для збільшення тиску з метою підвищення ефективності роботи агрегату.

Геометрична спіраль – це крива лінія, яка описується точкою, що рухається з постійним прискоренням або уповільненням вздовж променя,

який, в свою чергу, обертається навколо нерухокої точки (полюса) з постійною кутовою швидкістю.

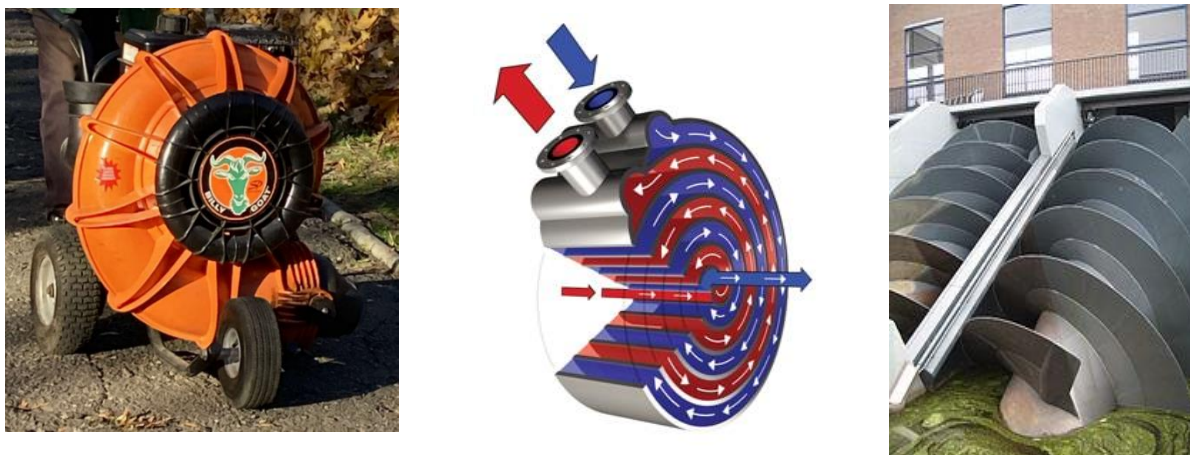


Рис. 7. Технічні конструкції спіральної форми.

В роботах автора [12, 13, 14] розглянуті природні гвинтові та спіральні явища, лінії та поверхні, а також наведено наукові дослідження в цьому напрямку, які дозволили створити різноманітні технічні об'єкти для промисловості: теплообмінник, осушувач ґрунту, шнеки тощо. Продовжуючи геометричне дослідження в цій роботі розглянемо теоретичні та практичні аспекти деяких інших видів спіралей.

Із інших видів спіралей найголовніше практичне значення має геометрична крива клотоїда, яку іноді називають спіраллю Ейлера, оскільки у нього вона зустрічається вперше, а частіше вона відома як спіраль Корню.

Клотоїда – це плоска спіралеподібна крива, що складається з двох гілок, які розташовані симетрично відносно початку координат. Ці гілки нескінченно число разів обвиваються навколо фокусів M_1 і M_2 та необмежено наближаються до них (рис.8). Геометричною моделлю такої спіралі може бути стародавній сувій (рис.9).

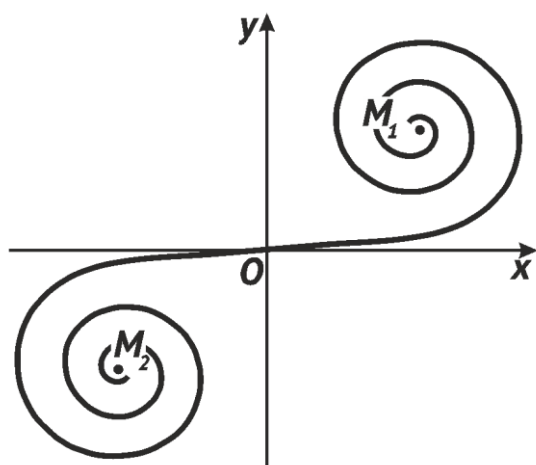


Рис.8. Клотоїда

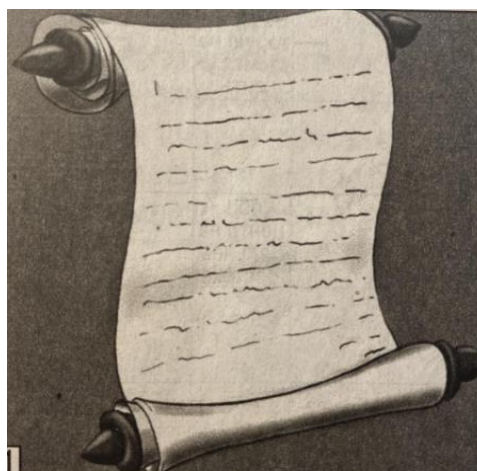


Рис. 9. Зображення стилізованого старовинного сувоя у формі клотоїди

Клотоїда є плоскою кривою, у якій радіус кривини змінюється лінійно як функція від довжини дуги. Це плоска трансцендентна крива, рівняння якої має вид: $r=a/s$, де r – радіус кривини, $a = \text{const}$, параметр клотоїди, s – довжина дуги. В параметричній формі рівняння клотоїди може бути записано у виді: $x = \int_0^s \cos \frac{s^2}{2a} ds$, $y = \int_0^s \sin \frac{s^2}{2a} ds$.

Спіраль Корню (клотоїда) дотикається до осі абсцис у початку координат. Асимптотичні точки (фокуси кривої) мають такі координати: $M_1(\pi a/2, \pi a/2)$ та $M_2(-\pi a/2, -\pi a/2)$. Межі інтегрування при розрахунку дифракції світла визначаються розмірами щілин, через які йде світло, та екранів, на яких відбувається дифракція.

Визначимо та дослідимо деякі геометричні властивості спіралі Корню.
 1. Клотоїда має нескінченну довжину. 2. Спіраль симетрична відносно початку координат. 2. Кривина спіралі Корню прямо пропорційна довжині шляху, що пройдено. Це головна особливість спіралі.

Якщо коефіцієнт a в рівнянні клотоїди дорівнює одиниці, то довжина відрізка кривої від нуля до t дорівнює t . Кривина змінюється лінійно від 0 до $2t$. Кут повороту дотичної до кривої на відрізок від нуля до t дорівнює 12 радіан.

Проаналізовані властивості дають змогу застосовувати спіраль Корню в такій галузі, як оптика, де використовують клотоїду для розв'язання прикладних задач з дифракції світла графічним способом. Крім того спіраль Корню застосовують для знаходження амплітуди коливань та розрахунку інтенсивності світла [15].

Але найбільш широке застосування спіраль Корню отримала при будівництві розв'язок автомобільних доріг та залізничних шляхів. Клотоїда виявилася ідеальною кривою для закруглення шляхів, оскільки її радіус кривини збільшується пропорційно довжині дуги.

При проектуванні автомобільних доріг та залізничних шляхів використовуються такі форми перехідних кривих (рис.10):

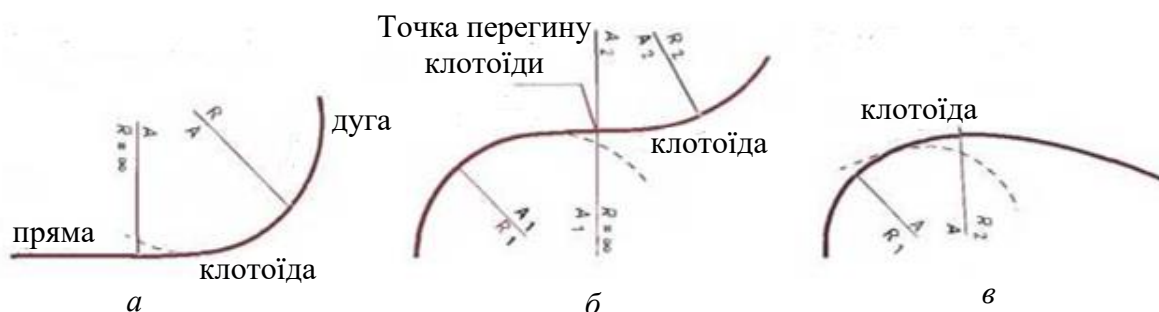


Рис.10. Варіанти використання клотоїди як перехідної кривої:
 а – проста перехідна дуга; б – лінія перегину; в – яйцеподібна лінія.

1. Проста клотоїда, як перехідна крива між прямою лінією до дугою кола;

2. «Поворотна клотоїда», як специфічна перехідна крива, що забезпечує з'єднання двох кругових кривих, які спрямовано в протилежні сторони (розташовані обернено вигнутими одна до одної), та утворюють латинську літеру «S». На цій ділянці змінюється характер кривини;

3. «Яйцеподібна клотоїда» (коробова клотоїда), забезпечує перехід між двома однаково вигнутими (спрямованими в один і той саме бік) дугами кругових кривих різних радіусів.

Вдovж довжини перехідної частини кривої відбувається зміна радіуса заокруглення. За рахунок використання перехідних кривих при проектуванні доріг забезпечується неперервність лінії проїзної частини, яка дозволяє рухатися з рівномірною швидкістю та дає неперервну (плавну) лінію дороги. Завдяки багаторічним дослідженням найбільш вдалим варіантом руху при повороті дороги було визнано такий: пряма – клотоїда – коло – клотоїда – пряма (рис. 11). При такій схемі руху відцентрова сила, що діє на автомобіль або на залізничний состав, змінюється поступово, без ривків та опаски сходу з траси або з рейок. Така форма дороги дозволяє здійснювати поворот без суттєвого зниження швидкості.

Введення перехідних кривих за клотоїдою при будівництві автомобільних доріг та залізничних шляхів, разом з максимальною плавністю траси, забезпечує ще такі додаткові переваги. Покращуються умови руху автомобілів й поїздів, особливо в темний час доби, підвищується безпека руху у зв'язку зі збільшенням відстані видимості, зменшуються обсяги земляних робіт за рахунок кращого вписування траси в рельєф місцевості, а також комфорт пасажирів у поїзді.

Крім цього клотоїда використовується на гоночних трасах та на американських гірках (рис. 12). Згідно з сучасними вимогами Міжнародної федерації зі стрибків з трампліна на лижах, лінія приземлення трамплінів також повинна бути описаною такою кривою, як клотоїда.



Рис.11. Моделювання осі з'їзду транспортної розв'язки дугами клотоїд



Рис.12. Вигляд вертикальних петель екстремальних атракціонів на основі клотоїди

Говорячи про спіраль Корню (клотоїду) обов'язково потрібно згадати музикальні смичкові інструменти, такі як скрипка, альт, віолончель та контрабас. В їх конструкції використовується геометрична крива – клотоїда.

На рис. 13 проведено геометричне дослідження форм кривих, що використовуються при виготовленні скрипки. Показано геометрично, що завиток скрипки, форма ефа (резонаторного отвору) та еса (талії) виконується за комбінацією клотоїд з різними параметрами a . Різні школи майстрів-виробників визначалися за клоцями (талією), обручниками та завитку. Особливо із цих елементів виділяється завиток, його навіть можна називати «розписом автора». Така геометрична конструкція форми корпусів струнних інструментів дозволяє отримувати дивне м'яке, співуче звучання, що зачаровує своєю красою та мелодійністю.

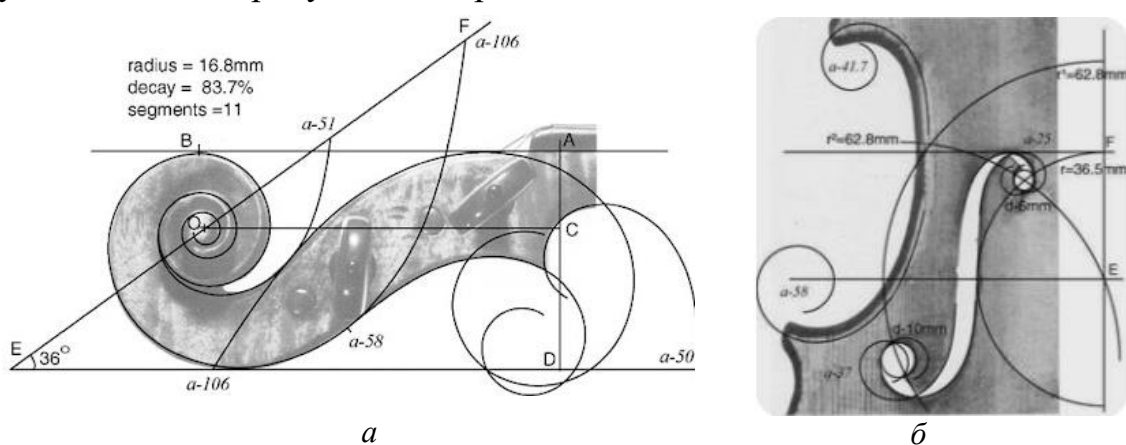


Рис.13. Клотоїда в конструкції скрипки:
 a – завиток скрипки; b – еф та талія скрипки

В окрему групу спіралей можна виділити так звані *SI-CI* спіралі (синусоїдальні спіралі). Таку назву вони отримали від англійської назви *Sine-Cosine Integral Spiral*, або *Spiral with Sine-Cosine Integration*. Незважаючи на таку назву «синусоїдальні спіралі», більшість із них не є «справжніми» спіралями, оскільки рухома точка не завжди віддаляється від полюса, а часто утворює замкнені петлі або фігури, схожі на квіти.

SI-CI спіраль – це плоска крива, радіус-вектор якої виражений через комбінацію синусної та косинусної функцій інтегрального типу. Їх формула основана на функції косинуса, яка задає залежність радіуса r від кута ϕ .

Синусоїдальні спіралі – це сімейство плоских математичних кривих, які описуються рівнянням $r^n = a^n \cos(n\theta)$ у полярних координатах [16]. Якщо врахувати можливість повороту кривої відносно початку координат рівняння також може бути записано у вигляді $r^n = a^n \sin(n\theta)$.

Використовуються синусоїдальні криві для опису і аналізу геометричних форм, які описуються наведеними вище рівняннями. В залежності від значення параметра n може бути отриманий широкий спектр класичних геометричних кривих ліній та фігур, які є окремими

випадками синусоїдальної спіралі.

Якщо надати значення $n=2$, то отримаємо лемніскату Бернуллі із рівнянням $r^2 = a^2 \cos(2\phi)$, при $n=-2$ утворюється рівностороння гіпербола $x^2 - y^2 = a^2$. При побудові лінії для $n=-1$ виходить пряма лінія $y=ax+b$, а для $n=1$ отримаємо коло з рівнянням $r = a \cos \phi$. Параметр $n=-1/2$ дасть параболу $y=ax^2+bx+c$, а $n=1/2$ формує кардіоїду з рівнянням у полярних координатах $r = a(1 - \cos \phi)$.

Далі проаналізуємо основні загальні геометричні властивості так званих синусоїдальних кривих. При раціональному значенні параметра n крива лінія має n осей симетрії, тобто синусоїдальні криві мають властивість симетричності. При інверсії відносно полюса одна синусоїдальна спіраль переходить в іншу, наприклад, коло перетворюється в пряму, а парабола в кардіоїду. Відзначимо, що подерна крива синусоїдальної спіралі відносно її полюса також є синусоїдальною спіраллю.

Геометричні особливості більшої кількості кривих ліній, що можуть бути утвореними при різних значеннях коефіцієнта n в рівнянні синусоїдальної спіралі (пряма лінія, гіпербола, парабола, коло), було розглянуто в попередніх роботах автора.

Уявляє інтерес розглянути геометричні особливості **кардіоїди**, рівняння якої утворюється при $n=1/2$. Це плоска лінія, яку опише фіксована точка кола, яке рухається без ковзання вздовж нерухомого кола з таким же радіусом. Крива отримала таку назву за її схожість зі стилізованим зображенням серця (рис. 14). Початкова точка розташовується в початку координат і вона же є точкою звороту кривої. Як було показано вище кардіоїда є окремим випадком синусоїдальної спіралі. Її рівняння в полярних координатах звичайно записують як

$$\rho = a(1 \pm \cos \phi) \quad \text{або} \quad \rho = a(1 \pm \sin \phi),$$

де a – радіус кіл, що формують криву, ρ (або r) – відстань від полюса. На рис. 15 показано варіанти розташування в різних положеннях кардіоїди в системі полярних координат. У декартових прямокутних координатах у неявному виді рівняння можуть бути записаними таким чином:

$$(x^2 + y^2)^2 + 4ax(x^2 + y^2) - 4a^2y^2 = 0 \quad \text{або} \\ (x^2 + y^2 + 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2).$$

У параметричному записі можна виразити так:

$$x(\phi) = 2a(1 - \cos \phi) \cos \phi; \\ y(\phi) = 2a(1 - \cos \phi) \sin \phi.$$

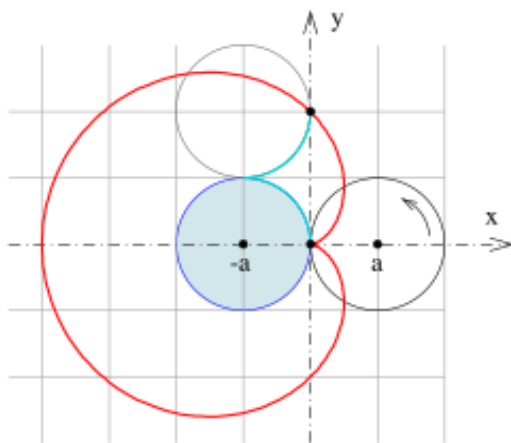


Рис.14. Кардіоїда в декартовій системі координат

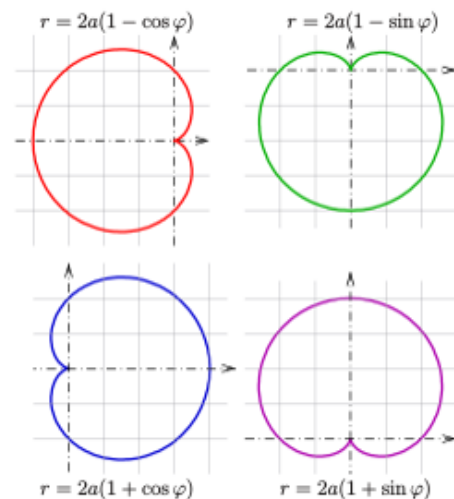


Рис.15. Чотири види кардіоїд залежно від їхніх рівнянь у полярних координатах

При дослідженні кардіоїди можна прослідити такі властивості:

1. Кардіоїда є алгебраїчною кривою четвертого порядку. Вона має точку звороту у вигляді вістря.
2. Кут μ між дотичною до кардіоїди та радіус-вектором точки дотику дорівнює половині кута між цим радіус-вектором та полярною віссю $\mu = \varphi/2$.
3. Кут між дотичною до кардіоїди та віссю Ox дорівнює $3\varphi/2$.
4. Дотичні до кардіоїди, що проведені на кінцях хорди, яка проходить через вістря кардіоїди, взаємно перпендикулярні.
5. При повороті на кут, який кратний 2π , кардіоїда суміщається сама з собою.

Одним із практичних напрямів використання кардіоїди є мікрофони, які використовуються при записи вокалу в студіях звукозапису (рис. 16).



Рис.16. Конденсаторний мікрофон з діаграмою у вигляді кардіоїди

Важливою їх характеристикою є спрямованість приладу, тобто визначення чутливості приладу на різних відстанях від нього. В результаті утворюються різні види малюнків. Один з них є кардіоїда. Назва такої діаграми, як кардіоїда, пов'язана з формою серця. Це обумовлено тим, що сигнали поступають у фронтальну ділянку капсули під кутом дії в 130° .

Сторонні шуми при цьому відсікаються. Прилади з таким типом діафрагми, як правило, використовуються при студійному записи вокалу. Потрібно відзначити, що категорично неможна розміщувати мікрофони такого різновиду біля динаміків або надмірно близько до джерел звука.

Потрібно відзначити, що крім вказаного синусоїдальні криві можуть бути використаними в механіці, геодезії та при вивченні каустик. Такі спіралі часто використовуються в машинобудуванні, в автомобільній та авіаційній аеродинаміці, а також у комп'ютерному моделюванні для плавного з'єднання траєкторій зі змінною кривизною.

Розглядаючи геометричні властивості синусоїдальних кривих не можна не згадати про **лемніскату Бернуллі**, яка є окремим випадком синусоїдальних спіралей. Назва «лемніската» походить ще із часів античності, де так називали бантик, яким закріплювався вінок на голові переможця у спортивних змаганнях. Форма лемніскати дійсно схожа на форму банта. Математичні дослідження цієї чудової кривої були започатковані Якобом Бернуллі, тому саме його ім'я носить ця крива.

Геометричне моделювання лемніскати Бернуллі можна провести кінематичним способом та відобразити за допомогою трьох відрізків. Візьмемо в площині дві точки A і B , в яких закріпимо відрізки – ланки кривошипно-шатуного механізму $ACDB$ (рис. 17). Причому довжини ланок механізму повинні мати такі співвідношення: $AC = BD = \frac{AB}{\sqrt{2}}$ та $CD = \frac{AB}{2}$. При обертанні відрізка AC навколо точки A середина відрізка

З математичної точки зору лемніската Бернуллі є алгебраїчною кривою четвертого порядку, яка має два фокуси F_1 та F_2 (рис. 18) та характеризується тим, що добуток відстані від фокусів до будь-якої точки кривої є величина незмінна. Дослідження показали, що вона дорівнює квадрату половини відстані між фокусами.

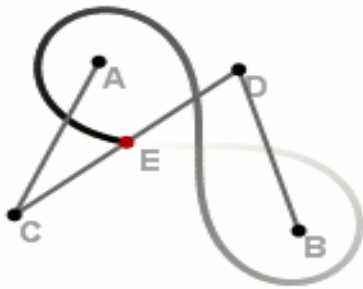


Рис.17. Лемніската Бернуллі як траєкторія руху точки E чотириланковника

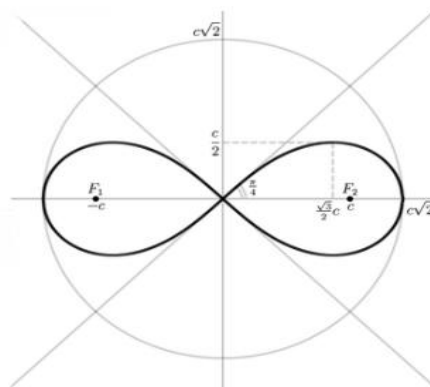


Рис.18. Графік у вигляді кривої 4-го порядку (лемніската Бернуллі)

Алгебраїчне рівняння лемніскати в полярних координатах має вигляд: $\rho^2 = 2c^2 \cos 2\varphi$. Для отримання рівняння в прямокутних координатах приймемо, що точка O є початком координат, який поділяє відрізок між фокусами навпіл; тоді фокуси мають координати: точка $F_1(-c, 0)$ та точка $F_2(c, 0)$; відстань між фокусами дорівнює $2c$. Тоді рівняння лемніскати в прямокутних координатах у неявному вигляді має вид:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2).$$

Геометричні та алгебраїчні властивості лемніскати вивчені та добре викладені у роботі [17, стор. 156]. Відзначимо деякі основні з них. Лемніската є кривою четвертого порядку, яка має дві осі симетрії: це пряма $F_1 F_2$ та серединний перпендикуляр до цього відрізка. Крива має подвійну точку, тобто перетинає сам себе; для розглянутого нами випадку на рис. 18 початок координат точка O є подвійною точкою. Прямі лінії з рівнянням $y = \pm x$ є взаємно перпендикулярними та дотичними в подвійній точці лемніскати і складають з відрізком $F_1 F_2$ кути $\pm \frac{\pi}{4}$. Кут μ між дотичною до лемніскати у довільній точці та радіус-вектором точки дотику дорівнює $\mu = 2\varphi + \frac{\pi}{2}$. Лемніската Бернуллі перетинає вісь Ox в точках з координатами $A(c\sqrt{2}, 0)$ та $B(-c\sqrt{2}, 0)$. Крива має два максимуми та два мінімуми з координатами відповідно $(x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}c, y = \pm \frac{c}{2})$.

Інверсія лемніскати Бернуллі, рівняння якої $\rho^2 = 2c^2 \cos 2\varphi$, з центром у подвійній точці перетворює лемніскату в синусоїдальну спіраль $\rho^{-2} = 2c^2 \cos 2\varphi$, тобто в рівнобічну гіперболу. А подорою лемніскати є синусоїдальна спіраль з рівнянням $\rho^{\frac{2}{3}} = (\sqrt{2}c)^{\frac{2}{3}} \cos\left(\frac{2}{3}\varphi\right)$. Лемніската, в свою чергу, є подорою рівнобічної гіперболи. Геометричне місце проєкцій центрів кривини лемніскати на відповідні радіуси-вектори є також лемніската, рівняння якої $\rho^2 = \frac{4}{9}c^2 \cos 2\varphi$.

Такі геометричні і математичні дослідження дозволили використовувати лемніскату Бернуллі для геометричного моделювання будь-яких об'єктів s - подібної форми. Наприклад, доктором технічних наук Борисенко Валерієм Дмитровичем було запропоновано нові методи геометричного моделювання проточних частин турбомашин, а саме меридіональних обводів та профілів лопаток турбін з використанням зокрема лемніскати Бернуллі. Це дало проектантам турбомашин змогу швидко і якісно змоделювати оптимальний профіль, що враховує складну просторову геометрію робочих коліс для зменшення втрат енергії потоку робочої речовини та подовження терміну служби лопаткового апарату турбомашин.

Крім цього лемніската використовується в техніці та транспорті як перехідна лінія на заокругленнях малого радіуса на залізничних коліях в гірничій місцевості, а також на трамвайних коліях. Таке формування колії необхідно для плавного змінення кривини та зменшення відцентрової сили при повороті.

У роботах [18, 19] розглянуто питання модифікації лемніскати Бернуллі (рис. 19) шляхом введення у полярне рівняння додаткових параметрів, які дозволяють трансформувати її форму, розширюючи можливості класичної кривої.

Модифіковане рівняння лемніскати запишеться у такому виді: $\rho = a\sqrt{\cos(n\varphi)}$. Тоді результати комп'ютерного моделювання (рис. 20) доводять, що модифіковані криві повністю відповідають критеріям

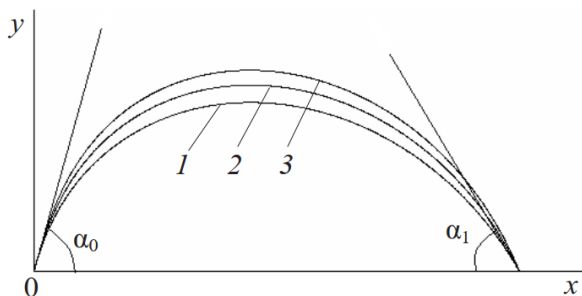


Рис.19 .Модифіковані дуги лемніскат для різних значень параметру m

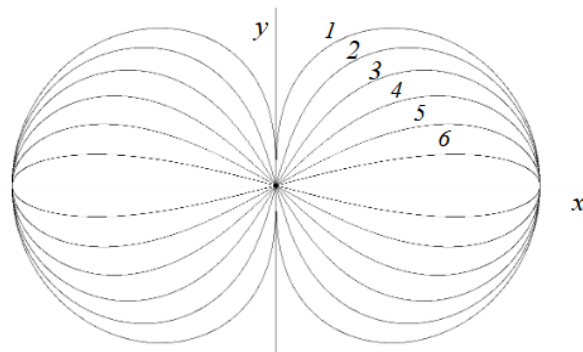


Рис. 20. Вплив параметра n на криву

Бернуллі.

Така модифікація дозволяє застосовувати лемніскату до моделювання складних контурів у техніці або інших прикладних галузях, зокрема перехідних кривих залізничних колій, в яких самими проблемними місцями є криволінійні ділянки шляху. Головним елементом змодельованої траєкторії є перехідна крива (рис. 21), яка забезпечує плавність переходу від прямолінійної ділянки до кругової. Тестовий приклад моделювання (рис. 22) кривої залізничного шляху демонструє рівномірний розподіл графіку кривини вздовж ділянки кривої, що є необхідним фактом для безпечного руху транспортного засобу.

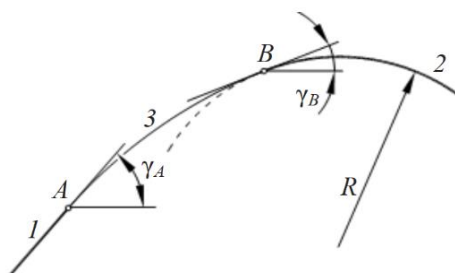


Рис. 21 .Перехідна крива між прямою та круговою ділянками

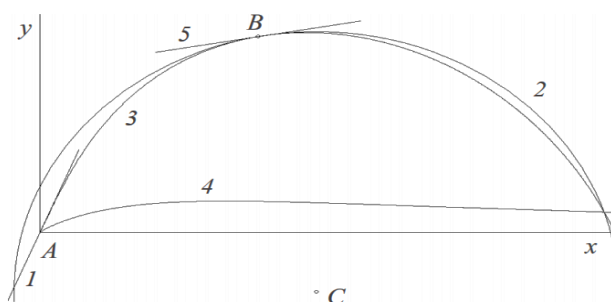


Рис. 22. Тестовий приклад побудови перехідної кривої

Наведені вище приклади доводять, що лемніската застосовується в інженерній графіці та прикладній геометрії для модифікації форми, наприклад, при проектуванні деталей, які можуть мати складний геометричний профіль. Розглянутий алгоритм формування складних кривих ліній може бути математичною моделлю для застосування в електротехніці, наприклад, при описі та розрахунку специфічних електромагнітних полів, потенціалів, а також для моделювання криволінійних траєкторій частинок. Особлива вісім подібна форма

лемніскати дає змогу застосовувати її для моделювання складних геометричних контурів у прикладній електродинаміці.

В електротехніці лемніската Бернуллі описує еквіпотенціальні лінії електричного поля, яке створюється паралельними струмами, утвореними в нескінченно довгих провідниках, в площині, яка перпендикулярна до них. У фізиці в математичних моделях лемніската застосовується як опис траєкторії руху, використовуючи властивість, що під дією сили тяжіння матеріальна точка може рухатися по дузі лемніскати.

Особливої уваги для розглядання та дослідження заслуговує **спіраль Галілея**, яка названа на честь італійського фізика і астронома Галілео Галілея, який ще у 1636 році вивчав і описував в своїх роботах теорію вільного падіння тіл. Дійсно, якщо враховувати обертання Землі, то траєкторія каміння, що падає з великої висоти, це спіраль Галілея.

Спіраль Галілея – це траєкторія переміщення точки, що рухається рівноприскорено вздовж прямої лінії, яка, в свою чергу, обертається навколо деякої своєї точки (полюса). На рис. 23 схематично показано окремі положення прямої лінії, яка обертається, та точка на ній, яка описує спіраль Галілея.

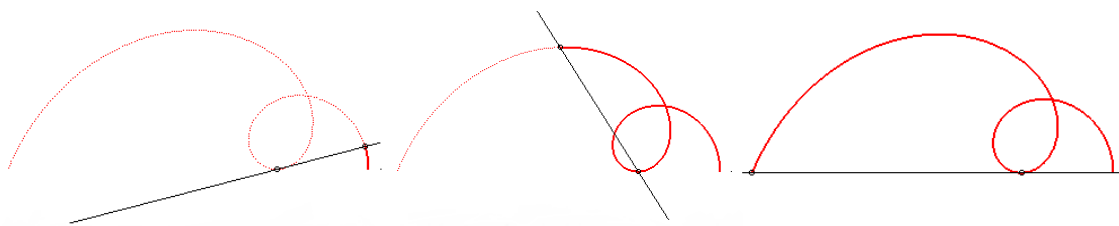


Рис.23. Схема утворення спіралі Галілея

Крім цього, з геометричної точки зору форма спіралі Галілея може бути отримана як результат кочення параболи у якості твірної лінії вздовж Архімедової спіралі, яка виступає у ролі напрямної лінії (рис. 24). тоді вершина параболи опише спіраль Галілея.

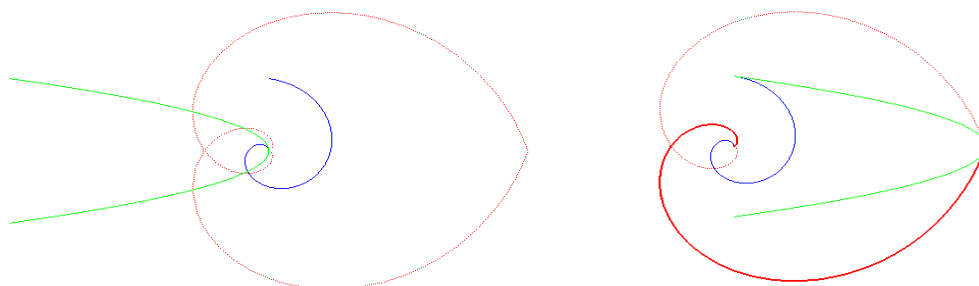


Рис.24. Утворення спіралі Галілея шляхом кочення параболи вздовж спіралі

Рівняння цієї спіралі у полярних координатах має вид: $\rho = b\theta^2 - d$, де $d > 0$. На рис. 25 показано різні геометричні форми спіралі Галілея [20] для різних значень коефіцієнта b . Рівняння може бути переписаним і в звичайній класичній формі: $\rho = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + \rho_0$, $\theta = \omega t$. Після повороту

системи координат це рівняння можна привести к стандартному виду.

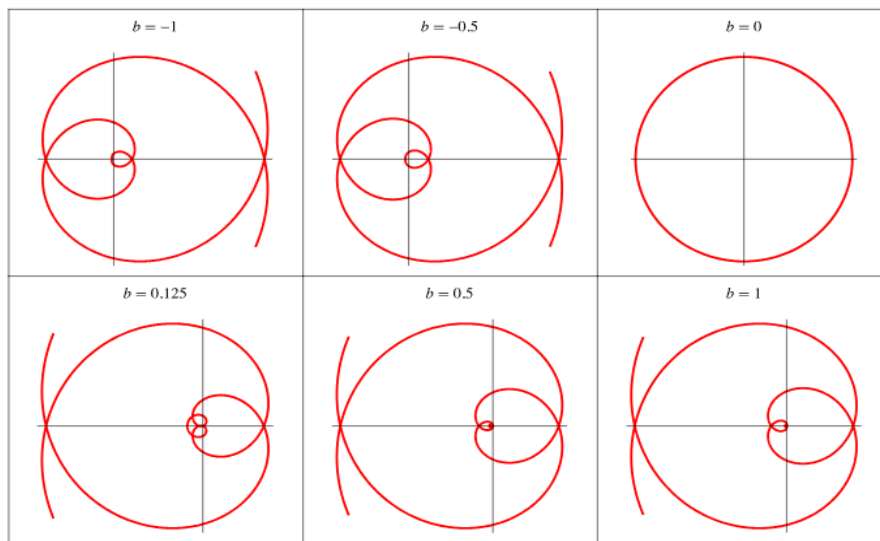


Рис.25. Геометричні форми спіралі Галілея для різних значень коефіцієнта b

Галілео Галілей у своїх дослідженнях прийшов до цієї форми кривої, аналізуючи траєкторію тіла, що вільно падає на Землю, яка обертається, намагаючись поєднати закони механіки з рухом планети. Він намагався знайти дійсну форму кривої траєкторії каміння, яке падає з висоти. Він вважав, що це дуга кола. Але при падінні з висоти каміння бере участь у двох рухах: рівноприскореному прямолінійному (по відношенню до Землі) та обертальному по колу (разом із Землею). Саме комбінація цих двох рухів в результаті дає спіраль Галілея. Покажемо це.

Рівноприскорений рух каміння по відношенню до земної поверхні за законом Галілея має вираз: $s = \frac{gt^2}{2}$, де s – відстань, яку проходить тіло, g – прискорення вільного падіння, t – час руху.

Оскільки Земля обертається навколо своєї осі, то рівняння обертального руху запишеться у виді: $\varphi = \omega t$, де φ – кут обертання, ω – кутова швидкість, t – час. Звідси виразимо час $t = \varphi/\omega$.

Позначимо через R початкову відстань від центра Землі до положення тіла (радіус Землі плюс висота, з якої падає тіло). Тоді поточна відстань тіла ρ від центру Землі буде дорівнювати різниці між початковою відстанню та пройденим шляхом: $\rho = R - s$.

Підставимо в наведену формулу вираз для шляху: $\rho = R - \frac{gt^2}{2}$. Далі підставимо вираз для часу: $\rho = R - \frac{g}{2} \left(\frac{\varphi}{\omega}\right)^2$. Можна переписати цей вираз, як: $\rho = R - \left(\frac{g}{2\omega^2}\right) \varphi^2$. Оскільки вираз у дужках є константою, то позначивши його через a отримаємо рівняння $\rho = R - a\varphi^2$. Саме такий вид рівняння має крива, яку ми знаємо, як спіраль Галілея. Вона показує,

що при збільшенні кута повороту φ відстань до центру Землі зменшується все швидше, оскільки тіло прискорюється.

На рис. 26 показана схема експерименту для вивчення процесу падіння тіла з висоти. Чорним кольором представлено площу екватора земної кулі, червоним – спіраль Галілея, а зеленим – коло, що апроксимує спіраль. Схема показує, що якщо нехтувати силою тертя повітря, то на ділянці, яка є малою в порівнянні з відстанню до центру Землі, траєкторія руху тіла під дією своєї ваги являє собою частину спіралі Галілея.

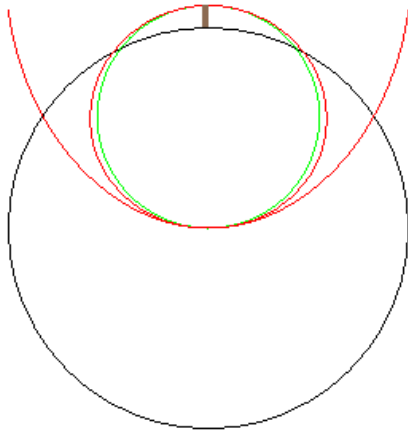


Рис.26. Схема траєкторії падіння каміння з висоти (експеримент Галілея)

Галілей у своїх припущеннях щодо колової траєкторії був недалеко від дійсності. Але рівняння частини спіралі у вигляді

$$\rho = 1 - \left(\frac{\pi}{2}\theta - 1\right)^2 \text{ доводить, що}$$

падіння здійснюється саме за спіраллю.

Аналізуючи математичні властивості спіралі Галілея потрібно відзначити, що крива є симетричною відносно полярної осі; подвійна точка розташована в полюсі. Дотичні у подвійній точці утворюють кути з полярною віссю, які дорівнюють $\pm\sqrt{d/a}$. На полярній осі розташуються незчисленно багато подвійних точок, які знаходяться від центру на відстанях $\rho = ak^2\pi^2 - d$, де $k=1,2,3,\dots$

Можна показати, що для спіралі Галілея виконується рівність $\rho(\theta + 2\pi) - \rho(\theta) = 4\pi b(\theta + \pi)$. А оскільки це так, то можна вважати, що спіраль – це край трапецієподібної стрічки, згорнутої в рулон (рис. 27). Таке зображення спіралі дуже схоже з формою хвоста хамелеона, яка існує у живій природі.

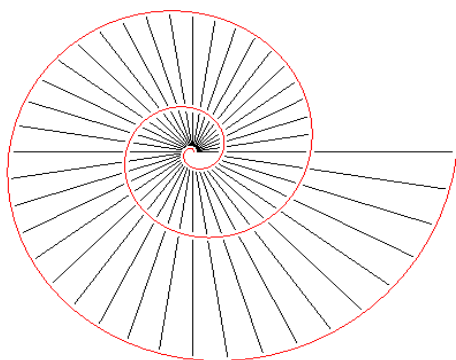


Рис.27. Теоретичне та практичне представлення спіралі Галілея

Спіраль Галілея має як історичне значення у становленні класичної механіки, так і сучасне застосування в інженерії. Головне призначення цієї кривої – це математичний опис прискореного руху тіл.

Спіраль Галілея описує траєкторію точки, що віддаляється вздовж прямої лінії від центру з постійним прискоренням, при чому пряма обертається рівномірно навколо однієї своєї точки.

У багатьох гілках машинобудівної промисловості спіралі Галілея застосовуються для проектування механізмів, де потрібна зміна швидкості. Спіралеподібні профілі використовуються в техніці для створення чутливих елементів, таких як деякі види пружин або вимірювальні прилади, тобто саме там, де зусилля має зростати квадратично відносно кута повороту. В кулачкових механізмах перетворення рівномірного обертання валу у прискорений рух штовхача здійснюється шляхом проектування та виготовлення профілів кулачків за формою сегментів спіралі Галілея.

У класичній геометрії спіраль Галілея є окремим випадком ізохронної кривої Варіньона. У механічних системах, в яких час руху не повинен залежати від амплітуди, спіраль Галілея використовується для розрахунку механічних коливань. Крім того, спіральні криві з квадратичною залежністю застосовуються в автоматизованих системах для створення плавних переходів між прямими та круговими ділянками траєкторії.

Отже, виконаний аналіз плоских спіральних форм, які розповсюджені в діяльності людини, доводить широкий спектр їх використання для різноманітних галузей застосування. Проведене геометричне дослідження показало, що ці криві цікавлять фахівців різних галузей науки і техніки, довело химерність різновидів спіральних форм як в природі, так і у штучно створених об'єктах, що підтверджує необхідність подальших геометричних досліджень з метою можливості модифікації спіралей та поширення сфери застосування і впровадження у нові створювані об'єкти різних галузей.

Висновки та перспективи. 1. У роботі проведено геометричне дослідження спіралі Корню та деяких видів синусоїдальних спіралей. Надано їх визначення, математичні рівняння в полярних та параметричних координатах, сформовано геометричні моделі, виконано аналіз геометричних особливостей. 2. Підбрано різноманітні найбільш характерні приклади об'єктів, які демонструють широкий спектр розповсюдження спіралей, що доводить актуальність даного геометричного дослідження. 3. Проаналізовано сфери практичного застосування різних видів спіралей у діяльності людини зокрема у будівництві доріг та залізничних колій, у механіці, у машинобудуванні, в електротехніці, в автомобільній та авіаційній аеродинаміці, а також у комп'ютерному моделюванні та у фізиці при побудові математичних моделей. 4. Зроблено висновок про доцільність подальших геометричних досліджень з метою можливості модифікації спіральних кривих та поширення сфери їх застосування і впровадження у нові створювані об'єкти різних галузей.

Література

1. *Ботвіновська С.І.* Теоретичні основи формоутворення в дискретному моделюванні об'єктів архітектури та дизайну : автореф. дисертації на здобуття наукового ступеня д-ра техн. наук : 05.01.01 Київ : КНУБА, 2018. 43с.
2. *Ботвіновська С. І., Золотова А. В.* Загальний параметричний аналіз задачі геометричного моделювання дискретної рівноланкової кривої статико-геометричним методом. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2024. Вип. 106. С. 41–56. DOI: <https://doi.org/10.32347/0131-579x.2024.106>.
3. *Ботвіновська С.І.* Моделювання криволінійних поверхонь об'єктів дизайну та управління їх формою. *Сучасні проблеми архітектури та містобудування*. Київ : КНУБА, 2017. Вип. 47. С. 451–457. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Spm_2017_47_58
4. *Ботвіновська С.І.* Дискретне моделювання в задачах формотворення дизайн-об'єктів/ Міжвідомчий науковий збірник «Управління розвитком складних систем». Київ: КНУБА, 2019. <https://doi.org/10.6084/M9.FIGSHARE.9783194>.
5. *Ботвіновська С. І., Золотова А.В.* Використання просторового проєктивного перетворення у статико-геометричному методі / Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка» Вип.108. Київ: КНУБА, 2025. С. 32–42.
6. *Ботвіновська С.І., Ковальов С.М., Золотова А.В.* Формування дискретних каркасів купольних споруд / *Восточно Европейский научный журнал*. Варшава, Польща. Том. 1. № 12(64), 2020. Опубліковано: 2021-03-22. С. 13–17. <https://archive.eesa-journal.com/index.php/eesa/issue/view/9/38>
7. *Ботвіновська С.І.* Конхоїдальне перетворення, як приклад активного перетворення координат при дискретному моделюванні поверхонь / *Сучасні проблеми моделювання*. Мелітополь, МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2019. Випуск 16. С.25-38. DOI: <https://doi.org/10.33842/2313-125X-2019-16>.
8. *Ботвіновська С.І.* Аналіз можливостей використання геометричних перетворень при моделюванні дискретних каркасів поверхонь / *Сучасні проблеми моделювання*; зб. наук. праць; гол. ред. кол. А.В. Найдиш. Мелітополь. Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2018. Випуск. 13. 201 с. С. 19–29. <https://magazine.mdpu.org.ua/index.php/spm/article/view/2639>
9. *Бідніченко О.Г.* Криві та поверхні другого порядку в природі та архітектурних спорудах / Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип.103. Київ: КНУБА, 2022. С. 3–15. DOI:10.32347/0131-579x.2022.103.
10. *Бідніченко О.Г.* Прямі лінії та лінійчаті поверхні в науці, природі та архітектурних спорудах. Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип.104. Київ: КНУБА, 2023. С. 3–15. <https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.104>.
11. *Бідніченко О.Г.* Лінійчаті, але не плоскі поверхні в науці, техніці та архітектурних спорудах. Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип.105. Київ: КНУБА, 2023. С. 3–15. <https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.105>.

12. *Бідніченко О.Г.* Геометричне моделювання гвинтових циліндричних поверхонь та їх практичне застосування. Міжвідомчий науково-технічний збірник «*Прикладна геометрія та інженерна графіка*». Вип.106. Київ: КНУБА, 2023. С. 3–14. <https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.106>.
13. *Бідніченко О.Г.* Особливості геометрії спіралей та їх природне і практичне застосування. Міжвідомчий науково-технічний збірник «*Прикладна геометрія та інженерна графіка*». Вип.107. Київ: КНУБА, 2024. <https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.107.3-20>.
14. *Бідніченко О.Г.* Логарифмічна спіраль як геометрична форма та її природне і практичне застосування. Міжвідомчий наук.-техн. збірник «*Прикладна геометрія та інженерна графіка*». Вип.108. Київ: КНУБА, 2025. С. 3–17. DOI: <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2025.108.3-17>
15. Спіраль Корню. <https://surl.li/wlbolt>
16. Синусоїдальні спіралі. URL: https://uk.wikipedia.org/wiki/Синусоїдальна_спіраль
17. Фіхтенгольц Г.М. Курс диференціального та інтегрального числення. 2024. 2403 с. (укр).
18. Борисенко, В. Д., Устенко С. А., Модифікація лемніскати Бернуллі та її практичне застосування / *Вчені записки ТНУ ім. В. І. Вернадського*. Сер. Технічні науки. Київ, 2020. № 3, т. 31 (70), ч. 1. С. 1–6. <https://eir.nuos.edu.ua/handle/123456789/4435>.
19. *Борисенко В. Д., Устенко І. В., Устенко С. А.* Деякі аспекти модифікації лемніскати Бернуллі / *Сучасні проблеми моделювання*. 2021. № 20. С. 35–47. DOI: 10.33842/2313-125X/2021/20/35/47.
20. Спіраль Галілея <https://mathworld.wolfram.com/GalileanSpiral.html>

References

1. *Botvinovs'ka S.I.* Teoretychni osnovy formoutvorennya v dyskretnomu modelyuvanni ob"yektiv arkhitektury ta dyzaynu : avtoref. dysertatsiyi na zdobuttya naukovoho stupenya d-ra tekhn. nauk : 05.01.01 Kyuyiv : KNUBA, 2018. 43s. {in Ukrainian}
2. *Botvinovs'ka S.I., Zolotova A.V.* Zahal'nyy parametrychnyy analiz zadachi heometrychnoho modelyuvannya dyskretnoyi rivnolankovoyi kryvoyi statyko-heometrychnym metodom/ Zbirnyk naukovykh prats' «*Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika*» №106. Kyiv: KNUBA, 2024. S. 41–56. DOI: <https://doi.org/10.32347/0131-579x.2024.106>. {in Ukrainian}
3. *Botvinovs'ka S.I.* Modelyuvannya kryvoliniynykh poverkhon' ob"yektiv dyzaynu ta upravlinnya yikh formoyu / *Suchasni problemy arkhitektury ta mistobuduvannya*. Kyuyiv : KNUBA, 2017. № 47. S.451–457. {inUkrainian}.
4. *Botvinovs'ka S.I.* Dyskretne modelyuvannya v zadachakh formatvorennya dyzayn-ob"yektiv/ Mizhvidomchyuy naukovyy zbirnyk «*Upravlinnya rozvytkom skladnykh system*». Kyuyiv: KNUBA, 2019. <https://doi.org/10.6084/M9.FIGSHARE.9783194>. {in Ukrainian}
5. *Botvinovs'ka S. I., Zolotova A.V.* Vykorystannya prostorovoho proyektivnoho peretvorennya u statyko-heometrychnomu metodi / *Mizhvidomchyuy naukovy-*

- tekhnichnyy zbirnyk «Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika» Vyp.108. Kyiv: KNUBA, 2025. S. 32–42. {in Ukrainian}
6. *Botvinovs'ka S.I., Koval'ov S.M., Zolotova A.V.* Formuvannya dyskretnykh karkasiv kupol'nykh sporud / Vostochno Evropeyskyy nauchnyy zhurnal. Varshava, Pol'sha. Tom. 1. № 12(64), 2020. Opublikovano: 2021-03-22. S. 13–17. <https://archive.eesa-journal.com/index.php/eesa/issue/view/9/38>. {in Ukrainian}
 7. *Botvinovs'ka S.I.* Konkoidal'ne peretvorennya, yak pryklad aktyvnoho peretvorennya koordynat pry dyskretnomu modelyuvanni poverkhon' / *Suchasni problemy modelyuvannya. Melitopol'*, MDPU im. B. Khmel'nyts'koho, 2019. Vypusk 16. S. 25–38. DOI: <https://doi.org/10.33842/2313-125X-2019-16>.
 8. *Botvinovs'ka S.I.* Analiz mozhyvostey vykorystannya heometrychnykh peretvoren' pry modelyuvanni dyskretnykh karkasiv poverkhon' / *Suchasni problemy modelyuvannya; zb. nauk. prats'; hol. red. kol. A.V. Naydysh. Melitopol'*. Vydavnytstvo MDPU im. B. Khmel'nyts'koho, 2018. Vyp. 13. 201s. S. 19–29. <https://magazine.mdpu.org.ua/index.php/spm/article/view/2639>
 9. *Bidnichenko O.H.* Kryvi ta poverkhni druhoho poryadku v pryrodi ta arkhitekturnykh sporudakh / *Mizhvidomchyy naukovo-tekhnichnyy zbirnyk «Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika»*. Vyp.103. Kyiv: KNUBA, 2022. S. 3–15. DOI:10.32347/0131-579x.2022.103. {inUkrainian}
 10. *Bidnichenko O.H.* Pryami liniyi ta liniychati poverkhni v nautsi, pryrodi ta arkhitekturnykh sporudakh / *Mizhvidomchyy naukovo-tekhnichnyy zbirnyk «Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika»*. Vyp.104. Kyiv: KNUBA, 2023. S. 3–15. <https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.104>. {inUkrainian}
 11. *Bidnichenko O.H.* Liniychati, ale ne ploski poverkhni v nautsi, tekhnitsi ta arkhitekturnykh sporudakh / *Mizhvidomchyy naukovo-tekhnichnyy zbirnyk «Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika»*. Vyp.105. Kyiv: KNUBA, 2023. S. 3–15. <https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.105>. {inUkrainian}
 12. *Bidnichenko O.H.* Heometrychne modelyuvannya hvyntovykh tsylindrychnykh poverkhon' ta yikh praktychne zastosuvannya / *Mizhvidomchyy naukovo-tekhnichnyy zbirnyk «Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika»*. Vyp.106. Kyiv: KNUBA, 2023. S. 3–14. <https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.106>. {inUkrainian}
 13. *Bidnichenko O.H.* Osoblyvosti heometriyi spiraley ta yikh pryrodne i praktychne zastosuvannya / *Mizhvidomchyy naukovo-tekhnichnyy zbirnyk «Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika»*. Vyp.107. Kyiv: KNUBA, 2024. S. 3–20. <https://doi.org/10.32347/0131-579x.2023.107.3-20> {inUkrainian}.
 14. *Bidnichenko O.H.* Loharyfmichna spiral' yak heometrychna forma ta yiyi pryrodne i praktychne zastosuvannya. *Mizhvidomchyy naukovo-tekhnichnyy zbirnyk «Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika»*. Vyp.108. Kyiv: KNUBA, 2025. S. 3–17. {inUkrainian}. DOI: <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2025.108.3-17>
 15. *Spiral' Kornyu*. <https://surl.li/wlbolt>
 16. Synusoyidal'ni spirali. https://uk.wikipedia.org/wiki/Synusoyidal'na_spiral'
 17. Fikhtenhol'ts H.M. Kurs dyferentsial'noho ta intehral'noho chyslennya. 2024. 2403 s. {inUkrainian}
 18. *Borysenko, V. D., Ustenko S. A., Ustenko I. V.* Modyfikatsiya lemniskaty Bernulli ta yiyi praktychne zastosuvannya / *Vcheni zapysky TNU im. V. I. Vernads'koho*. Ser. Tekhnichni nauky. Kyiv, 2020. № 3, t. 31 (70), ch. 1. S. 1-6. <https://eir.nuos.edu.ua/handle/123456789/4435>.

19. Borysenko V. D., Ustenko I. V., Ustenko S. A. Deyaki aspekty modyfikatsiyi lemniskaty Bernulli / *Suchasni problemy modelyuvannya*. 2021. № 20. S. 35-47. DOI: 10.33842/2313-125X/2021/20/35/47.
20. *Spiral' Halileya* <https://mathworld.wolfram.com/GalileanSpiral.html>

Ph. D., assoc. Prof. **Helen Bidnichenko**
helenbidnichenko@gmail.com, ORCID: 0000-0002-0548-3481
Admiral Makarov National University of Shipbuilding (Mykolaiv)

ANALYSIS OF THE GEOMETRY FEATURES OF VARIOUS SPIRAL SHAPES

This work is devoted to the topical issue of the analysis of geometric features and the clarification of the mathematical description of the Cornu spiral (clothoid) and some types of sinusoidal spirals, namely cardioids, Bernoulli lemniscates, and Galilean spirals. Their theoretical and practical aspects are considered, the mathematical description in the form of equations in parametric form and in various aspects of presentation for the convenience of conducting research is highlighted. Geometric models of the specified types of spirals are constructed, their geometric properties are analyzed, and the spheres and directions of application in practical human activity are highlighted. Geometric modeling of the shape of the Bernoulli lemniscate was carried out by introducing additional parameters into the polar equation, which allow transforming the shape of the curve, obtaining a set of geometric solutions, expanding the capabilities of the classical form. It is shown that due to their geometric features, spirals are widely used for modeling lines and surfaces of an s-shaped shape, as well as for forming transitional curves of railway tracks, highways, various types of attractions, etc. It has been geometrically proven that the shapes of the bodies, curls and cutouts in musical string instruments are performed according to the clothoid, which allows you to get a strange soft, singing sound that fascinates with its melody. The article simulates the trajectory of a stone falling from a height in Galileo's experiment, which proves that the trajectory of a body's movement under the action of its own weight is a part of the Galilean spiral. It is shown that one of the practical areas of use of cardioid is microphones used in vocal recording in recording studios. In addition, it is noted that sinusoidal curves can be used in mechanics, geodesy, and in the study of caustics. It is noted that spiral shapes are often used in mechanical engineering, in automotive and aviation aerodynamics, as well as in computer modeling for smooth connection of trajectories with variable curvature. In many branches of the mechanical engineering industry, Galilean spirals are used to design mechanisms where a change in speed is required.

Keywords: *spiral shapes, geometric model; theoretical aspects; Cornu spiral; sinusoidal spirals; practical application.*