

УДК 514.181

DOI: 10.32347/0131-579x.2026.110.40-57

д. т. н., професор, **Ботвіновська С.І**
botvinovska.si@ knuba.edu.ua, ORCID ID 0000-0002-1832-1342

к. т. н., доцент, **Золотова А.В.**
zolotova.av@knuba.edu.ua ORCID ID 0000-0001-8014-3834

к. т. н., доцент, **Суліменко Г.Г.**
sulimenko.hh@knuba.edu.ua, ORCID ID 0000-0002-2454-1675

Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ,
Україна

ПОБУДОВА ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНОЇ ПРОСТОРОВОЇ КРИВОЇ ЗА ЗАДАНИМИ ЗНАЧЕННЯМИ КРИВИНИ ТА СКРУТУ В КІНЦЕВИХ ВУЗЛАХ

Рівень автоматизованого проектування у різних галузях будівництва та інженерії залежить від якості програмного продукту, поставлених завдань, кількості супутніх розв'язаних задач та можливостей наукових розробок та методів, реалізованих у системах проектування. У задачах моделювання просторових кривих ліній і досі залишаються задачі, які не мають свого остаточного розв'язку і потребують розробки нових сучасних математичних апаратів. Існує широкий клас кривих ліній, форма яких базується на збереженні значень диференційних характеристик у заданих точках. У процесі геометричного моделювання, коли форма кривої лінії розглядається не просто як геометричний об'єкт, а як результат оптимізації її динамічних або енергетичних характеристик, використання кривини та скруту може бути пов'язане не лише із розрахунковими складнощами, а і з відсутністю єдиного практично-простого методу. У практиці реального комп'ютерного проектування криволінійних елементів архітектури та дизайну, виникають потреби дискретизації геометричних образів та даних, які повинні забезпечити ефективність обчислення координат вузлів просторових кривих та подальше конструювання просторових кривих із визначеними характеристиками. Це зумовлює доцільність застосування дискретного підходу до моделювання просторових кривих ліній. Формотворення дискретно представленої просторової кривої забезпечить необхідну точність розрахунків координат її вузлів та дозволить зберегти задані диференціальні характеристики кривої в точках інтерполяції. Розробці теоретичних основ моделювання дискретних рівноланкових просторових кривих ліній та знаходженню нових алгоритмів побудови кривих із заданими значеннями кривини та скруту в кінцевих точках присвячено представлену статтю.

Ключові слова: дискретно представлена крива; дефект кривини; дефект скруту; просторова крива; властивості об'єкта.

Постановка проблеми. Геометричне моделювання кривих ліній та поверхонь охоплює широкий спектр задач, спрямованих на розв'язання архітектурно-інженерних проблем, пов'язаних із збереженням заданих властивостей об'єктів. Так, наприклад, умова збереження мінімальної плавності зміни кривини кривої гарантує динамічну стабільність, а саме відсутність ривків у процесі переміщення вздовж неї. Сучасний інструментарій геометричного моделювання дозволяє вирішувати комплексні проблеми проектування просторових кривих ліній за рахунок збереження їх диференціальних та геометричних характеристик. Такий підхід є особливо актуальним при дискретному представленні модельованих об'єктів. У процесі комп'ютерного моделювання просторових кривих ліній кривина та скрут можуть виступати керуючими параметрами, які визначають внутрішню геометрію лінії через натуральні рівняння і дозволяють варіювати форму цих ліній. У той же час, моделюючи просторову криву із заданими властивостями, коли її форма розглядається не просто як геометричний об'єкт, а як результат оптимізації її динамічних або енергетичних характеристик, використання кривини та скруту може бути пов'язане не лише із розрахунковими складнощами, а і з відсутністю єдиного практично-простого методу. Саме дискретизація геометричних образів та даних забезпечить ефективність обчислення координат вузлів просторових кривих та подальше конструювання ліній із визначеними (або заданими) характеристиками. Аналітично вивести рівняння кривої за заданими крайовими умовами та заданими, у явній формі, довільними значеннями кривини та скруту і сьогодні залишається не простою задачею. Саме тому дослідники постійно шукають нові наближені чи числові методи для вирішення цієї задачі. Створення суцільних і складених просторових кривих на базі крайових умов із явно заданими кривиною та скрутом – це все ще вагома науково-прикладна задача.

Моделювання просторової кривої лінії за заданими значеннями кривини та скруту є суттєво нелінійною задачею, і тому пропонується її розв'язання на основі дискретного геометричного моделювання.

Аналіз основних досліджень і публікацій. У архітектурному проектуванні дискретні просторові криві лінії залишаються основою для створення дискретних кривих поверхонь. Наприклад, при створенні просторових оболонок, що перекриватимуть значні простори, просторові криві лінії виступатимуть базовими конструктивними елементами, за допомогою яких подібна оболонка дискретизується на чарунки.

Використовуючи дискретний підхід, існує можливість розраховувати ламані осьові лінії будівельних елементів так, щоб у вузлах стикування кути нахилу та скручування балок відповідали технологічним обмеженням виробництва (наприклад, щоб металеві вузли-конектори були

однотипними або щоб скляні панелі залишалися плоскими). Проектування просторових кривих за крайовими умовами, а саме кривиною та скрутом є прикладною задачею, що залежить від множини різноманітних чинників, які можуть суттєво змінювати геометричну форму та параметри отриманої лінії.

У роботах [1, 2, 3] розглянуто процес моделювання кривих ліній та поверхонь за допомогою статико-геометричного методу проф. С.М.Ковальова. Цей метод допомагає наочно моделювати криволінійні об'єкти, враховувати статистичні особливості останніх. В основі методу лежить робота з врівноваженими сітками, які формуються під впливом зовнішнього формоутворюючого навантаження, прикладеного до вузлів дискретно представленої моделі. Зовнішні зусилля виступають дискретними аналогами кривини та скруту лінії в кожній конкретній точці ламаної. Проте, коли йдеться про конструювання просторових кривих ліній з урахуванням їх геометричних властивостей, пов'язаних з кривиною та скрутом, виникають складності при записі системи рівнянь, якщо ці властивості подаються у вигляді функцій від довжини лінії.

Наукова стаття [4] присвячена асимптотичному аналізу дискретних аналогів кривини та скруту для просторових полігональних ліній (полігонів). Автори використовують математичний метод, який досліджує, як поводить себе дискретна (обчислена за точками) кривина лінії або поверхні, коли відстань між цими точками прямує до нуля. У роботі пропонується математично стійкий спосіб визначення скруту просторової кривої за допомогою складного відношення чотирьох точок. У роботі [5] автори описують, як алгоритмічно будувати просторові криві на дискретних сітках, оптимізуючи їх форму за критеріями заданої кривини та скруту. Робота представляє величезний інтерес саме з погляду числових методів та алгоритмізації, оскільки вона переводить класичні диференціальні характеристики кривої на мову дискретної оптимізації на дискретних структурах. Автори детально розширили пояснення математичної та алгоритмічної суті цього підходу, зокрема механізму переходу від 3-х до 4-х точок, а саме для оцінки кривини та скруту.

У роботах [6, 7] розглядається задача формування просторових одновимірних обводів з закономірною зміною кривини та скруту. Автор пропонує використати метод варіативного дискретного геометричного моделювання і спирається на формування кривої за допомогою окремих монотонних ділянок із наступною їх стиковкою, та відмовляється від аналітичного опису ліній із використанням складних громіздких формул. Замість цього крива представляється як сукупність точок (вершин) та параметрів між ними, що дозволяє легко обробляти її на комп'ютері. Управління кривиною виконується в неявному вигляді, а саме як управління кутами суміжності між ланками дискретно представленої кривої. Але як і в більшості інших досліджень йдеться лише про задоволення лише початкових умов, і не враховуються крайові.

Із проведеного аналізу літературних джерел видно, що задача моделювання кривих із заданими властивостями краще розв'язана для плоских кривих. Часто саме за рахунок плоских кривих визначається просторова крива, якщо в процесі переміщення точки вздовж плоского сегменту обертати площу, в якій лежить плоский сегмент навколо різних осей обертання. Але, незважаючи на велику кількість існуючих наукових досліджень, задачу регулювання закону зміни кривини не можна вважати остаточно розв'язаною. Актуальним залишається питання моделювання дискретно представлених просторових кривих з урахуванням законів зміни їх кривини та скруту. У роботі пропонується розглянути задачу, пов'язану із моделюванням дискретно представленої просторової кривої, у випадку коли задано значення кривини та скруту і задано напрямки дотичних у початковому та кінцевому вузлах.

Ціль статті. Розробити алгоритм конструювання дискретної просторової рівноланкової кривої з використанням натуральних рівнянь, законів зміни кривини та скруту в крайових точках та дотичних в них.

Основна частина. Розглянемо неперервну просторову криву лінію. Рівняння типу $\chi = \chi(s)$, $\sigma = \sigma(s)$, які виражають, відповідно, кривину та скрут через довжину (s) дуги такої кривої називаються натуральними рівняннями цієї лінії. Коли криві лінії описуються натуральними рівняннями – це значить, що описується саме форма кривих, яка не пов'язана з координатами точок, і не залежить від вибору системи координат. Натуральні рівняння описують лише внутрішні властивості кривих ліній, і не містять у собі координати точок. Тим самим, щоб зрозуміти геометрію кривої не потрібно залучати додаткові площини проєкцій чи координатні кути (тригранники Френе). Знання ж координат точок кривої лінії допоможе визначити не лише орієнтацію кривої лінії в просторі, але й місце її розташування відносно координатної системи. При переході від зображення кривої лінії в неперервній формі до її представлення в дискретному вигляді саме натуральні рівняння будуть трансформуватись у кути повороту та довжини ланок, що дозволить побудувати саме задану криву лінію і далі задати її позицію. Це є дуже важливим моментом, коли використовується моделювання кривих ліній за допомогою графічних систем типу Revit або SolidWorks.

Розглянемо клас ліній з *постійною кривиною* $\chi(s) = const$ та скрутом $\sigma(s) = const$, які можна представити натуральним рівнянням типу $\rho = \rho_0$, де ρ – радіус кривини. До таких ліній належать всі кола та всі гвинтові лінії. Останні часто використовують при моделювання різноманітних криволінійних форм в архітектурі та дизайні. Загальне рівняння всіх ліній цього класу можна представити як $\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{1}{\rho_0^2}$, ($\rho_0 = const$).

Наприклад, рівняння гвинтової лінії радіуса a з кроком $2\pi b$ в координатній формі буде мати вигляд:

$$\begin{cases} x = \frac{\chi_0}{\chi_0^2 + \sigma_0^2} \sin\left(\sqrt{\chi_0^2 + \sigma_0^2} \times s\right), \\ y = -\frac{\chi_0}{\chi_0^2 + \sigma_0^2} \cos\left(\sqrt{\chi_0^2 + \sigma_0^2} \times s\right), \\ z = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\chi_0^2 + \sigma_0^2}} s. \end{cases} \quad (1)$$

Якщо пов'язати диференціальні характеристики кривої лінії з додатковими конструктивними параметрами циліндра, система (1) набере іншого вигляду. Наприклад, якщо записати радіус основного кругового циліндра (a), на поверхні якого розміщено гвинтову лінію як (2):

$$a = \frac{\chi_0}{\chi_0^2 + \sigma_0^2}, \quad (2)$$

параметр кроку (b) – це гвинтовий масштаб, який характеризує швидкість підйому вздовж осі циліндра, як (3).

$$b = \frac{\sigma_0}{\chi_0^2 + \sigma_0^2}, \quad (3)$$

і записати формулу для визначення кута (v) нахилу дотичної або нормалі як (4):

$$v = \frac{\pi}{2} + \sqrt{\chi_0^2 + \sigma_0^2} \times s, \quad (4)$$

то система (1) набере вигляду:

$$\begin{cases} x = a \times \cos v, \\ e = a \times \sin v, \\ z = bv - \frac{1}{2} \pi b. \end{cases} \quad (5)$$

У цьому прикладі продемонстровано можливість переходу від натуральних рівнянь, що описують циліндричну гвинтову лінію до її параметричних рівнянь в декартових координатах, де кут нахилу дотичної (v) виступає параметром.

Якщо використати дискретну модель рівноланкової кривої саме формули (1)-(5) дозволять перейти від теоретичної моделі представлення кривити кривої до реальних параметрів майбутнього архітектурного об'єкта. Параметр (a) буде вказувати радіус конструкції (габарити опорного циліндра), а параметр (b) дозволить точно розрахувати крок підйому гвинтової лінії, а саме розташування вузлових точок при дискретизації кривої або елементів на ній.

Слід зазначити, що лише при використанні циліндричної гвинтової лінії, якщо задано залежності $\chi(s) = const$, $\sigma(s) = const$, можна розв'язати задачу через скінченну кількість алгебраїчних операцій та інтегралів, для інших кривих із заданими рівняннями типу $\chi = \chi(s)$, $\sigma = \sigma(s)$ потрібно розробляти алгоритми чисельного інтегрування цих виразів.

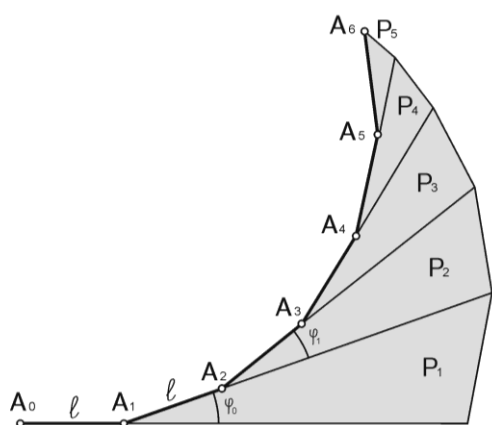


Рис.1 Кривина та скрут рівноланкової ламаної лінії за методом Вигодського М.Я

нескінченно зближених точках до відповідної дуги Δs ; ψ – кут суміжності стичних площин або бінормалей до відповідної дуги Δs . Граничний перехід кривої до ламаної буде відбуватись при нескінченно малій величині Δs , коли кут суміжності перетвориться на кривину. Так, наприклад, у нескінченно зближених точках при переході від неперервно заданої гвинтової лінії до її дискретного аналогу можна записати:

$$\chi_{\text{дискр}} = \frac{\varphi}{\ell}, \quad (6)$$

$$\sigma_{\text{дискр}} = \frac{\psi}{\ell}. \quad (7)$$

Вирази (6), (7) відповідають дискретним аналогам кривини та скриту, відповідно. У такому випадку кривиною ламаної рівноланкової лінії у вершині A_i називатиметься відношення кута φ між сусідніми ланками A_iA_{i+1} та $A_{i+1}A_{i+2}$ (рис.1) до довжини ланки ℓ , $i=1, \dots, N-1$. За аналогією, скрутом ламаної рівноланкової лінії у вершині A_i вважатиметься відношення кута ψ між площинами $A_iA_{i+1}A_{i+2}$ та $A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ до довжини ланки ℓ , для $i=1, \dots, N-2$. У такому випадку, скрут буде функцією довжини дуги ламаної, що визначена в усіх її точках, упритул до другої від кінця вершини. Якщо прийняти довжину ланки сталою величиною, то значення (6), (7) визначатимуть саме кривину та скрут дискретного аналогу гвинтової лінії у вигляді рівноланкової кривої.

Алгоритм дозволяє побудувати рівноланкову дискретно представлену криву, якщо задати законом зміни кривити на скрут в дискретному вигляді:

$$\varphi = \varphi(i), \quad (8)$$

$$\psi = \psi(i), \quad (9)$$

де i – номер вузла при заданих початкових умовах, а саме коли задані вузли A_0, A_1, A_2 . Саме ці три вузла будуть задавати стичну площину у вузлі A_0 . А вузли A_0, A_1 задаватимуть дотичну у вузлі A_0 .

Спробуємо перейти від неперервного завдання кривої до її дискретного аналогу. Оберемо криву у формі рівноланкової ламаної. Тоді крива з відомим заданим законом зміни кривини та скриту може бути побудована за алгоритмом, який було наведено у диференціальній геометрії Вигодського М.Я. [1]. Наприклад, за цим алгоритмом можна записати,

що $\chi = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\Delta s}$, $\sigma = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\psi}{\Delta s}$, де φ – кут

суміжності між дотичними в

Поточну точку A_{i+1} рівноланкової просторової кривої можна отримати за результатами двох послідовних операцій. Спочатку потрібно виконати оберт площини P_{i-1} (рис. 1) навколо ребра $A_{i-1}A_i$ на кут $\psi = \psi_{i-1}$. В результаті такого обертання з'явиться нова площина P_i . На наступному етапі потрібно обернути ланку A_iA_{i+1} навколо точки A_i у площині P_i теж на кут $\psi = \psi_{i-1}$, який буде відраховуватись від ребра $A_{i-1}A_i$. Цей алгоритм може використовуватись в дискретному моделюванні для побудови кривих ліній за заданими початковими умовами.

Розглянемо приклад, коли необхідно побудувати дискретну просторову рівноланкову криву лінію за заданими значеннями кривини та скруту у кінцевих точках. Конструювання базується на рівності кількості геометричних параметрів і умов, які вони можуть задовольнити. Візьмемо криву (крива параметрів), яка буде задавати натуральне рівняння модельованої кривої лінії, і вершини якої в явному вигляді будуть зав'язані з параметрами кривої. Саме у цьому випадку параметри натуральних рівнянь стануть управляючими чинниками процесу моделювання. Довжина лінії при заданій постановці задачі є дискретною величиною, тому не буде враховуватись при підрахунку вільних параметрів.

Для забезпечення вихідних умов маємо множини кутових еквівалентів кривини та скруту, відповідно $\{\varphi_j\}$, $\{\psi_j\}$ на інтервалі ($j=1, \dots, N$), де j – номери вершин ламаної параметрів. Кількість вільних параметрів буде дорівнювати кількості вершин ламаної, яка буде представлена як графік функції кривини або скруту. Використаємо кусково-лінійний закон розподілу кривини та скруту (інтерполянт). Слід зазначити, що не всі вершини ламаної (параметри) будуть обиратись вільними.

Параметричний аналіз показав, що при побудові дискретної просторової рівноланкової ламаної для задоволення крайових умов потрібно розробити функцію (інтерполянт), з 16-ма параметрами. Сюди будуть входити: координати початкової та кінцевої точок (по 3 координати); задані стичні площини, відповідно в початковій та кінцевій точках (по два параметри – кути, один кут фіксують її положення по відношенню до базової площини, другий кут повороту лінії найбільшого нахилу); прямі, що задають дотичні в початковій та кінцевій точках. У просторовому випадку ця дотична обов'язково повинна лежати в стичній площині і проходити через задану точку, тому замість двох параметрів (кутів нахилу прямої відповідно до координатних осей), обираємо один параметр; числове значення кривини в початковій та кінцевій точках (один параметр); числове значення скруту в цих точках (один параметр).

Для моделювання обираємо дві управляючі ламані параметрів (графіки функцій кривини та скруту). Будемо вважати, що в початковому вузлі всі умови є умовами стартової побудови, а значить заданими. Також,

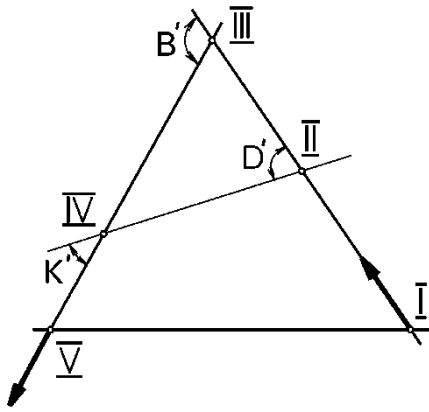


Рис. 2. Підрахунок кутового дефекту у площині

є ще чотири параметри, які не можна розглядати, як вільні – це кривина та скрут на графіку функцій в початковому та кінцевому вузлах. Тому залишається лише (6) параметрів $(16 - (2 \cdot 3) - 4 = 6)$, які будуть вважатися вільними.

На графіках функцій кривини та скриту це можуть бути по три внутрішні вершини, які і будуть управляти побудовою дискретної рівноланкової кривої.

Дискретну рівноланкову просторову криву побудуємо за алгоритмом, що описано вище для

побудови плоскої дискретної рівноланкової кривої. Для моделювання потрібно мати дефект кутової кривини та дефект кутового скриту, а саме, міру концентрації цих параметрів у вузлах модельованої кривої. Саме дефекти дозволяють оцінити наскільки точно дискретний каркас лінії апроксимує плавну неперервну просторову криву.

Але з визначенням дефектів у тривимірному просторі виникають труднощі, які можуть бути продемонстровані в порівнянні з двовимірним випадком (рис. 2).

При побудові дискретно поданої кривої із заданими дотичними у заданих точках, будь-яка ламана, для якої дотичні збігаються з першою та останньою ламаними відповідно, має наступну властивість. Алгебраїчна сума її зовнішніх кутів суміжності (з точністю до додатку, кратного $\frac{\pi}{2}$)

дорівнює куту суміжності між дотичними.

Розглянемо спрощений варіант цієї властивості. На рис. 2 представлено ламану криву, що моделюється. Задано вихідні точки – I та V, точка III – точка перетину заданих дотичних. Кут B' (зовнішній кут суміжності між цими дотичними), який і визначає розрахунковий кутовий дефект Δ . Якщо провести будь-яку довільну січну II-IV стає очевидним, що буде виконуватися рівність: $B' = D' + K'$. D', K' – зовнішні кути

суміжності ламаних $(I-II)(II-IV)$ та $(II-IV)(IV-V)$. Але в просторовому випадку не виконується навіть аналогічний спрощений варіант. Щоб домогтися аналогії, розглянемо сферичний образ (сферичну індикатрису) дотичних до кривої, що моделюється (рис. 3).

Нехай т. O – центр одиничної сфери, відрізки OI та OV – сферичні індикатриси дотичних у вихідних точках I та V, відповідно. Прямі nI та nV в точках I та V паралельні нормалям у вихідних точках кривої, що моделюється. Тоді, великі кола на сфері, що проведені через точки I та V в напрямках nI та nV, будуть паралельні стичним площинам у вихідних

точках. Сферична індикатриса дотичних до кривої, як і сферична індикатриса бінормалей, одночасно задають форму кривої, а при визначених початкових умовах і її положення [2]. Тому для задоволення ряду вихідних умов можна розглядати сферичну індикатрису дотичних, коли довжина дуги цієї індикатриса буде чисельно дорівнювати інтегральній кривині основної лінії. Маємо деяку аналогію проектування індикатриса на поверхні сфери з проектуванням плоскої кривої.

Роль дотичних до кривої на площині виконують великі кола. На сфері маємо ∞^2 великих кіл, тобто стільки, скільки прямих на площині.

Щоб домогтися аналога спрощеного варіанта властивості (рис. 2), розглянемо точку *III*, як точку перетину двох великих кіл, що моделюють стичні площини у вихідних точках, а точки *II* та *IV*, як точки перетину цих же кіл з довільним великим колом (рис. 3). Можемо побачити, що як і на рис. 2 кути B', D', K' – є відповідними зовнішніми кутами суміжності. Для того, щоб кут B' міг бути обраним як кутовий дефект між стичними площинами вихідної кривої, що моделюється, необхідне виконання рівності $B' = K' + D'$. Але на сфері ця рівність, у загальному випадку, не виконується. Дійсно, площа сферичного трикутника дорівнює надлишку 2π над сумою його зовнішніх кутів ($\sum A'_i$) [3].

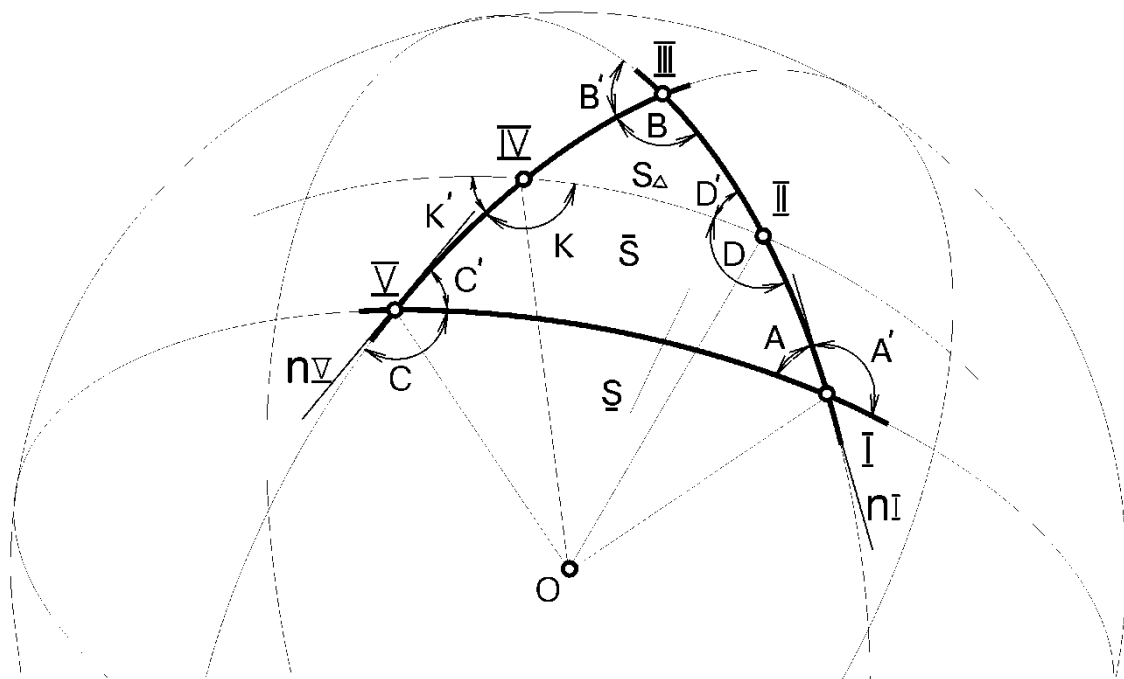


Рис. 3 Підрахунок кутового дефекту у тривимірному просторі

Для підрахунку кутового дефекту $\Delta(II, III, IV)$ $S_{\Delta} = 2\pi - B' - (180^{\circ} - K') - (180^{\circ} - D') = -B' + K' + D'$, де S_{Δ} - площа, яку окреслює образ дотичних на одиничній сфері між точками *II* та *IV*. Тоді при $B' = D' + K'$, ця площа S_{Δ} повинна дорівнювати 0 , а це можливе лише тоді, коли велике коло, задане точками *II* та *IV*, проходить через точку *III* і кути

D', K' у цьому випадку не несуть змістовного навантаження. Невиконання вже навіть спрощеного варіанту робить неможливим використання кута між вихідними стичними площинами для обчислення дефекту кутового скруту.

Тому пропонується інший підхід до розв'язання поставленої задачі. Припустимо, що існує просторова рівноланкова дискретно представлена крива лінія (k) (рис. 4), яка проходить через вихідні точки A_1 та A_N та допоміжні точки $A_{-1}A_0A_2$, $A_{N-1}A_{N+1}A_{N+2}$. Крива має фіксовану довжину ланки ℓ , це означає, що довжина хорди або крок дискретизації – відстань між двома сусідніми вузлами є величиною постійною, а значить виконується умова: $\rho(A_i A_{i+1}) = \ell$ при $i = -1, \dots, N+2$. Точки A_2 та A_{N-1} , разом з вихідними задають дотичні до кривої A_1A_2 та $A_{N-1}A_N$, а разом із точками A_0 та A_{N+1} – положення стичних площин $A_0A_1A_2$ та $A_{N-1}A_NA_{N+1}$, відповідно.

Дискретні аналоги кривини визначають відповідні кути між ланками дискретно представленої кривої (k):

$$\varphi_1 = (\widehat{A_0 A_1})(\widehat{A_1 A_2}), \quad \varphi_N = (\widehat{A_{N-1} A_N})(\widehat{A_N A_{N+1}}).$$

Існування ще двох додаткових точок A_{-1} та A_{N+2} задає ще дві площини $A_{-1}A_0A_1$ та $A_NA_{N+1}A_{N+2}$, такі, що дискретні аналоги скруту у вихідних точках кривої (k) визначають відповідні кути між площинами:

$$\psi_1 = (\widehat{A_{-1} A_1 A_0})(\widehat{A_0 A_1 A_2})$$

$$\psi_N = (\widehat{A_{N-1} A_N A_{N+1}})(\widehat{A_N A_{N+1} A_{N+2}})$$

Таким чином, завдання двох четвірок точок повністю визначає необхідні крайові умови – вихідні кінцеві точки і задані, в кожній з цих точок: стичні площини, дотичні, значення кривини та скруту. При цьому, обов'язково задаються стичні площини в законтурних точках A_0 та A_{N+1} (відповідно, Σ_0 та Σ_{N+1}). Але існує однопараметрична множина положень вузла A_{-1} та однопараметрична множина положень вузла A_{N+2} такі, що ці вузли будуть належати стичним площинам Σ_0 та Σ_{N+1} і знаходитися на відстані ℓ від вузлів A_0 та A_{N+1} .

Кожне з положень означених вузлів в площинах Σ_0 та Σ_{N+1} задає кривину просторової дискретно поданої представленої кривої у вузлах A_0 та A_{N+1} , відповідно φ_0 та φ_{N+1} . Ці значення є надлишковими щодо вихідних умов і у подальшому можуть розглядатися, як додаткові вільні параметри. Але, з урахуванням параметричного аналізу описаного вище, кривину φ_0 будемо включати до умов стартової побудови, функціонально використовуючи лише φ_{N+1} .

При проектуванні просторової дискретно представленої рівноланкової кривої, як сегмента загальної кривої, що сполучає два заданих сегмента, положення вихідних четвірок точок може сприйматися з сусідніх сегментів. Але для теоретичної та практичної визначеності задачі

необхідно розробити та реалізувати алгоритм, що за явно заданими вихідними умовами (заданою стичною площиною, дотичною, кривиною, скрутом) буде розраховуватися положення крайових четвірок точок.

Такий алгоритм наведено нижче. Крім означених вихідних умов він сприймає як параметр – кривину (φ_{N+1}) в точці A_{N+1} , зміна якого визначає положення точки A_{N+2} у стичній площині Σ_{N+1} .

Алгоритм побудови допоміжних крайових точок за явно заданими вихідними умовами при побудові просторової дискретно представленої рівноланкової кривої

Нехай в просторі задано: кінцева крайова точка T_1 ; дотична в ній T_1Q_1 та точка Q_2 , яка разом з точками T_1, Q_1 визначає стичну площину (Σ_1) в точці T_1 , (рис. 4, а).

Задані чотири величини: довжина ланки ℓ ; дискретні аналоги кривини дискретної рівноланкової кривої в точці $T_1 - (\varphi_1)$, та в точці $T_2 - (\varphi_2)$; значення дискретного аналогу скруту (ψ_1) – кута між стичними площинами Σ_1 та Σ_2 , які проходять через точки T_1 та T_2 .

Необхідно побудувати точки T_0, T_2 та T_3 такі, що: довжина ланок, які з'єднують точки T_0, T_1, T_2, T_3 буде однаковою і дорівнює ℓ ; точки T_0, T_2 будуть належати площині Σ_1 ; ланки T_0T_1 та T_1T_2 мають кут суміжності φ_1 ; ланки T_1T_2 та T_2T_3 – кут суміжності φ_2 ; кут між площинами $T_0T_1T_2$ та $T_1T_2T_3$ дорівнює ψ_1 .

Для виконання побудов у тривимірному просторі використовуються такі функції:

1. Побудова на заданій прямій T_1T_2 точки T на відстані ℓ від точки T_2 : $V(T_1, T_2, \ell, T)$. Відстань відкладається у напрямку протилежному точці T_1 . Координати точки T знаходяться за формулами:

$$\begin{aligned} x &= x_1 \times (1 - u) + x_2 \times u, \\ y &= y_1 \times (1 - u) + y_2 \times u, \\ z &= z_1 \times (1 - u) + z_2 \times u. \end{aligned} \tag{8}$$

Значення параметру :

$$u = 1 + \frac{\ell}{\rho(T_1T_2)}. \tag{9}$$

2. Визначення коефіцієнтів площини, яка проходить через три задані точки: $\xi(T_0, T_1, T_2, A, B, C, D)$, де $T_0(x_0, y_0, z_0), T_1(x_1, y_1, z_1), T_2(x_2, y_2, z_2)$ задані точки, а A, B, C – коефіцієнти площини $Ax + By + Cz + D = 0$.

Якщо точки T_0, T_1, T_2 не лежать на одній прямій, то функція повертає значення нуля і коефіцієнти площини розраховуються за формулою:

$$A = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

3. Побудова точки на заданій відстані від площини та від точки, що їй належить: $U(T_1, A, B, C, h, T)$. $\{A, B, C\}$ – коефіцієнти заданої площини, $T_1(x_1, y_1, z_1)$ точка, що належить цій площині, h – відстань на якій будується точка T . $\frac{x-x_1}{A} = t, \frac{y-y_1}{B} = t, \frac{z-z_1}{C} = t$ параметричне рівняння нормалі до площини $\{A, B, C\}$. При значенні параметру $t=0$ маємо координати точки $T_1(x_1, y_1, z_1)$, при $t=1$ – координати допоміжної точки $T_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$x_2 = A + x_1,$$

$$y_2 = B + y_1,$$

$$z_2 = C + z_1.$$

Координати точки $T(x, y, z)$ знаходяться за виразом (8), при значенні параметру $u = \frac{h}{\rho(T_1 T_2)}$.

Побудова точок T_0 , T_2 та T_3 виконується за допомогою цих трьох функцій (формальні параметри функцій замінюються на їх фактичні параметри, позначені на рис. 4, б), і побудова відбувається у наступній послідовності:

1. Спочатку необхідно знайти точку T_0 .

Вона буде знаходитися за функцією $V(Q_1, T_1, \ell, T_0)$. На заданій дотичній $T_1 Q_1$ від точки T_1 відкладаємо відстань, яка дорівнює довжині ланки ℓ .

2. На наступному етапі визначаються коефіцієнти (A_1, B_1, C_1) площини Σ_1 .

Для цього використовується функція $\xi(T_1, T_0, Q_2, A_1, B_1, C_1, D_1)$. Площина Σ_1 повинна проходити через задані точки T_0 , T_1 та Q_2 , остання точка є складовою частиною вихідних умов, і задається користувачем як точка, що не належить $T_1 Q_1$.

3. На третьому етапі знаходиться точки T_2 :

– визначається точка B на перпендикулярі до площини Σ_1 , проведеному з точки T_1 , на довільній відстані (наприклад ℓ) за допомогою функції $U(T_1, A, B, C, \ell, B)$;

– визначається точка K у площині Σ_1 , яка будується на дотичній $T_1 Q_1$ і на відстані $\ell \times \cos \varphi_1$, де φ_1 – кут між ланками кривої в точці T_1 , за функцією $V(T_0, T_1, \ell \times \cos \varphi_1, K)$;

– визначаються коефіцієнти площини Ω_1 , що проходить через точки K, B, T_0 , за функцією $\xi(K, B, T_0, A_2, B_2, C_2, D_2)$;

– визначається точка T_2 на нормалі до площини Ω_1 , яку знаходимо на відстані $\ell \times \sin \varphi_1$ від точки K за функцією $U(K, A_2, B_2, C_2, \ell \times \sin \varphi_1, T_2)$.

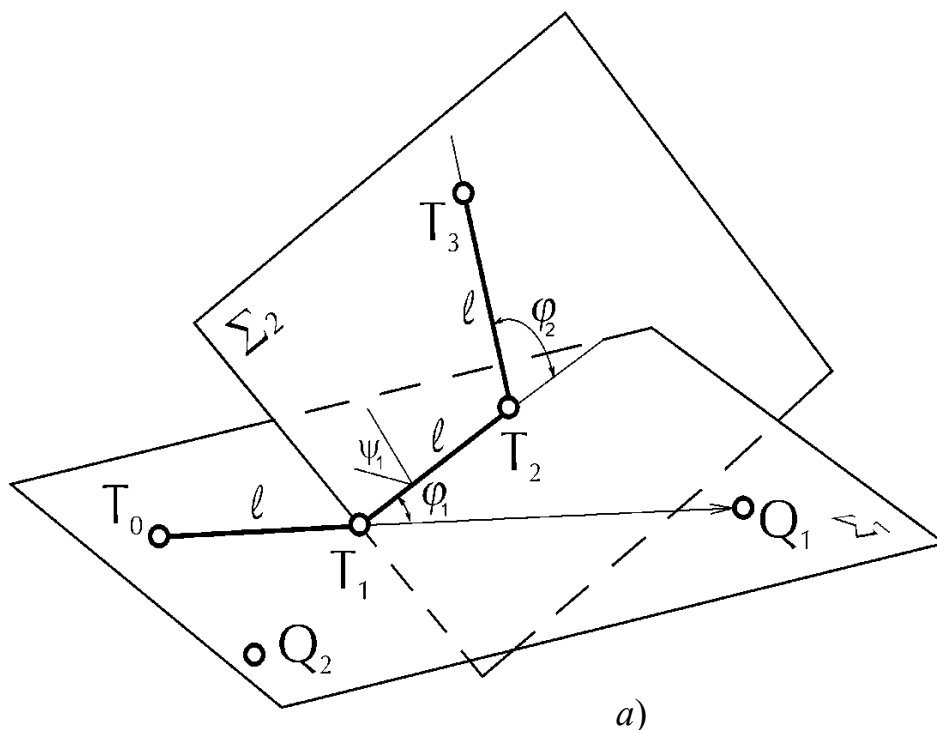
4. Четвертий етап – знаходження точки T_3 :

– визначається точка C , яка лежить в площині Σ_1 на продовженні відрізка T_1T_2 , на відстані h від точки T_2 . Відстань h вибираємо як $h = \ell \times \cos \varphi_2$. Точка C будується за функцією $V(T_1, T_2, \ell \times \cos \varphi_2, C)$;

– визначається точка D , яка лежить на перпендикулярі до площини Σ_1 , що виходить з точки C , при чому відстань (H_1) від точки C до точки D , визначається за формулою $H_1 = \ell \times \sin \varphi_2 \times \sin \psi_1$, що одержана за допомогою співвідношень у трикутниках $(\Delta CDT_3, \Delta T_3CT_2)$. Використовується функція $U(C, A_1, B_1, C_1, H_1, D)$;

– визначаються коефіцієнти площини Ω_2 , що проходить через точки T_2, D, C , за функцією $\xi(T_2, D, C, A_3, B_3, C_3, D_3)$;

– визначається точка T_3 на нормалі до площини Ω_2 , що встановлюється у точці D . Відстань (H_2) від точки T_3 до точки D розраховується одержана за допомогою співвідношень у трикутниках $(\Delta CDT_3, \Delta T_3CT_2)$, (рис. 4, б) за формулою $H_2 = \ell \times \sin \varphi_2 \times \cos \psi_1$. Для визначення точки T_3 використовується функція $U(D, A_3, B_3, C_3, H_2, T_3)$.



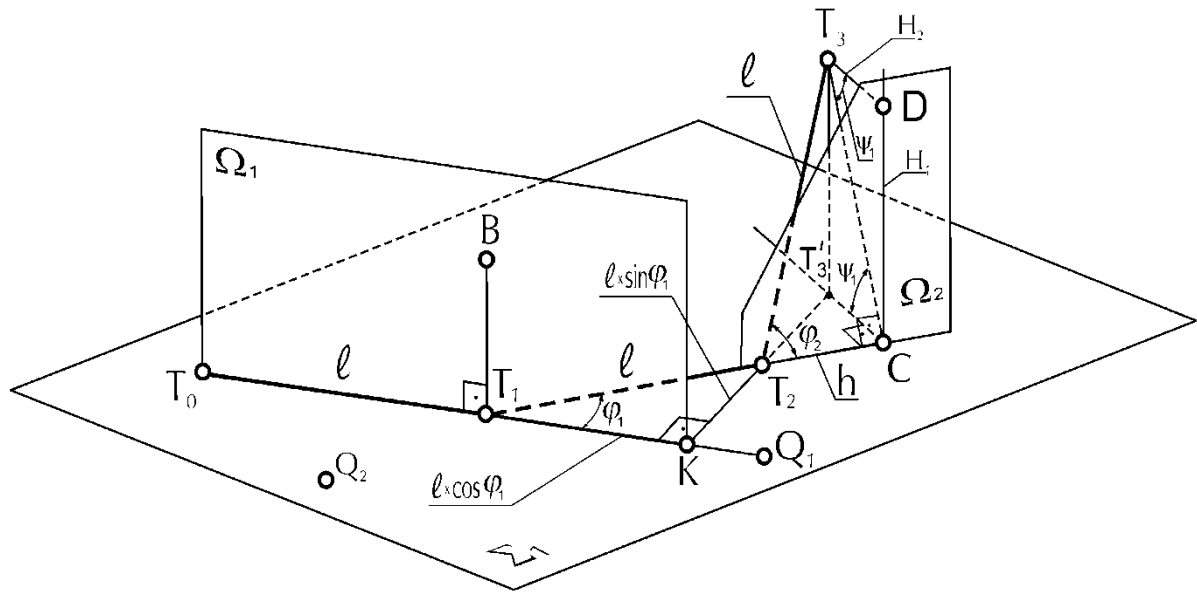


Рис.4. Графічне зображення роботи алгоритму побудови крайових точок за явно заданими вихідними умовами при побудові просторової дискретної рівноланкової кривої

Знаходження точок T_0, T_2 , виконується одноразово при встановленні вихідних умов, а точка T_3 перебудовується у процесі моделювання дискретної рівноланкової кривої за змінним параметром φ_2 , який за позначеннями основного алгоритму – є змінним параметром φ_{K_7} .

За описаним алгоритмом моделюються вузли просторової рівноланкової кривої $A_{N-1}, A_N, A_{N+1}, A_{N+2}$. Цей самий алгоритм застосовується для побудови законтурних вузлів $A_{-1}A_0 A_1A_2$, при цьому використовуються ті ж самі функції, але фактичні їх параметри перераховуються у зворотній послідовності. Для умов у початковому вузлі (A_1) весь розрахунок виконується одноразово.

Висновки та перспективи.

При моделювання складних форм архітектурних об'єктів, коли потрібно використати криві лінії із заданими властивостями, виникає питання визначення координат точок відповідних кривих ліній, а значить виникає потреба у записі кривої лінії в координатній формі. Слід зазначити, що дискретно представлена крива лінія представляє собою впорядковану множину точок, які задають її форму. Моделювання кривої лінії із завданням кривини та скруту дозволяє відтворювати гладкий об'єкт за обмеженим набором даних. Такий підхід дозволяє за допомогою дискретних аналогів кривини та скруту, моделювати просторові криві лінії, де мінімізація зміни кривини та скруту – це умова забезпечення плавності просторової кривої. Остаточне розв'язання нелінійної задачі з 16-ма параметрами у просторовому випадку, які мають бути задоволені

вихідними умовами, зведено до трьох одновимірних пошуків значень параметрів, що мінімізують відповідні функції.

При виконанні умови рівноланковості дискретної просторової кривої дозволяє розрахунок кутових дефектів виконати більш коректно. Оскільки усі ланки (ребра) дискретної моделі залишаються рівними, то зміна орієнтації кривої лінії в просторі залежить виключно від кутів між цими ребрами, що суттєво спрощує алгоритми автоматизації для САД-систем. Доведено, що при заданих початкових умовах закони зміни кутів суміжності між проєкціями ланок дискретно представленої просторової кривої на дві, не паралельні між собою площини проєкцій, будуть повністю визначати рівноланкову криву лінію в просторі.

Для теоретичної та практичної визначеності задачі побудови просторової дискретно представленої рівноланкової кривої розроблено алгоритм, у якому за явно заданими вихідними умовами в кінцевих вузлах рівноланкової дискретно поданої кривої, до яких належать: стичні площини, дотичні, значення кривина та скруту, буде розраховуватися положення крайових четвірок точок.

Література

1. Ковальов С.М., Ботвіновська С.І. Локальні інтерполяції дугами клотоїди з другим порядком гладкості / *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ : КНУБА, 2002. Вип. 71. С. 25-31.
2. Мостовенко Ол-др В., Ковальов С.М., Мостовенко Ол-сій В. Аналіз точності визначення кривизни дискретно представленої кривої / *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ : КНУБА, 2022. Вип. 103. С. 134-141. <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2022.103.134-141>
3. Ботвіновська С. І., Золотова А. В. Загальний параметричний аналіз задачі геометричного моделювання дискретної рівноланкової кривої статико-геометричним методом. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2024. Вип. 106. С. 41–56. DOI: <https://doi.org/10.32347/0131-579x.2024.106>.
4. Müller, C., Vaxman, A. Discrete curvature and torsion from cross-ratios. *Annali di Matematica* 200, 1935–1960 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10231-021-01065-x>
5. Strandmark, P., Ulén, J., Kahl, F., & Grady, L. (2013). Shortest Paths with Curvature and Torsion. In *Computer Vision (ICCV), 2013 IEEE International Conference on* (pp. 2024-2031). IEEE - Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.. <https://doi.org/10.1109/ICCV.2013.253>
6. Гавриленко Є. А. Геометричне моделювання просторових одновимірних та двовимірних обводів із заданими властивостями на основі дискретного підходу : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 05.01.01 / Гавриленко Євген Андрійович ; Київ. нац. ун-т будівництва і архітектури. Київ, 2017. 36 с.

7. Гавриленко Є. А. Варіативне дискретне геометричне моделювання одновимірних обводів з заданими диференціально-геометричними властивостями. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2015. Вип. 3 (54). С. 555–559. URL: <https://kntu.net.ua> (дата звернення: 24.04.2026).
8. Вигодський М. Я. Диференціальна геометрія. Київ : Радянська школа, 1955. 344 с.
9. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия : пер. с нем. / пер. С. А. Каменецкий. 3-е изд. Москва : Наука, 1981. 344 с.

References

1. Kovaliov, S. M., & Botvinovska, S. I. (2002). Lokalni interpoliatsii duhamy klotoidy z druhym poriadkom hladkosti [Local interpolations by clothoid arcs with the second order of smoothness]. *Prikladna Heometriia ta Inzhenerna Hrafika [Applied Geometry and Engineering Graphics]*, (71), 25–31. {in Ukrainian}
2. Mostovenko, O. V., Kovaliov, S. M., & Mostovenko, O. V. (2022). Analiz tochnosti vyznachennia kryvyny diskretno predstavlenoi kryvoi [Analysis of the accuracy of determining the curvature of a discretely represented curve]. *Prikladna Heometriia ta Inzhenerna Hrafika [Applied Geometry and Engineering Graphics]*, (103), 134–141. <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2022.103.134-141>. {in Ukrainian}
3. Botvinovska, S. I., & Zolotova, A. V. (2024). Zahalnyi parametrychnyi analiz zadachi heometrychnoho modeliuвання diskretnoi rivnolankovoi kryvoi statyko-heometrychnym metodom [General parametric analysis of the problem of geometric modeling of a discrete equal-link curve by the static-geometric method]. *Prikladna Heometriia ta Inzhenerna Hrafika [Applied Geometry and Engineering Graphics]*, (106), 41–56. <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2024.106.41-56>. {in Ukrainian}
4. Müller, C., Vaxman, A. Discrete curvature and torsion from cross-ratios. *Annali di Matematica* 200, 1935–1960 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10231-021-01065-x>. {in English}
5. Strandmark, P., Ulén, J., Kahl, F., & Grady, L. (2013). Shortest Paths with Curvature and Torsion. In *Computer Vision (ICCV), 2013 IEEE International Conference on* (pp. 2024-2031). IEEE - Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.. <https://doi.org/10.1109/ICCV.2013.253> {in English}
6. Havrylenko, Ye. A. (2017). *Heometrychne modeliuвання prostorovykh odnomirnykh ta dvomirnykh obvodiv iz zadanymy vlastyvostiamy na osnovi diskretnoho pidkhodu* [Geometric modeling of spatial one-dimensional and two-dimensional contours with given properties based on a discrete approach] (Doctoral dissertation's abstract, Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine). {in Ukrainian}

7. Havrylenko, Ye. A. (2015). Variatyvne dyskretne heometrychne modeliuvannia odnovymirnykh obvodiv z zadanymy dyferentsialno-heometrychnymy vlastyvostiamy [Variational discrete geometric modeling of one-dimensional contours with given differential-geometric properties]. *Visnyk Khersonskoho Natsionalnoho Tekhnichnoho Universytetu [Bulletin of Kherson National Technical University]*, 3(54), 555–559. {in Ukrainian}
8. Vyhodskyi, M. Ya. (1955). *Dyferentsialna heometriia* [Differential geometry]. Radianska Shkola. {in Ukrainian}
9. Hilbert, D., & Cohn-Vossen, S. (1981). *Naglyadnaya geometriya* [Geometry and the imagination] (3rd ed.). Nauka. {in Russian}

Doctor of Technical Sciences, Professor **Botvynovska Svitlana**,
 botvinovska.si@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-1832-1342
 Cand.Sc. or C.Sc., Associate Professor **Alla Zolotova**,
 zolotova.av@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-8014-3834
 Cand.Sc. or C.Sc., Associate Professor **Sulimenko Hanna**
 sulimenko.hh@knuba.edu.ua, ORCID ID 0000-0002-2454-1675

Kyiv National University of Construction and Architecture

CONSTRUCTION OF A DISCRETELY REPRESENTED SPATIAL CURVE FROM GIVEN VALUES OF CURVATURE AND TORQUE AT END NODES

Abstract. The level of automated design in various sectors of construction and engineering depends on the quality of the software, the tasks set, the number of related problems solved, and the capabilities of the scientific developments and methods implemented in the design systems. In the modelling of spatial curved lines, there remain problems that have no definitive solution and require the development of new, modern mathematical tools. There is a broad class of curved lines whose form is based on the preservation of the values of differential characteristics at specified points. In the process of geometric modelling, when the form of a curved line is considered not merely as a geometric object but as the result of optimizing its dynamic or energy characteristics, the use of curvature and torsion may be associated not only with computational complexities but also with the absence of a single, practically simple method. In the practice of real-world computer-aided design of curved architectural and design elements, there is a need to discretize geometric images and data, which must ensure the efficiency of calculating the coordinates of nodes of spatial curves and the subsequent construction of spatial curves with defined characteristics. This justifies the use of a discrete approach to modelling spatial

curves. The construction of a discretely represented spatial curve will ensure the necessary accuracy in calculating the coordinates of its nodes and will allow the specified differential characteristics of the curve to be preserved at the interpolation points. This article is devoted to the development of the theoretical foundations for modelling discrete, uniform-link spatial curves and to the discovery of new algorithms for constructing curves with specified values of curvature and torsion at the end points. To provide a theoretical and practical solution to the problem of constructing a spatially discrete-representation homogeneous curve, an algorithm has been developed in which, given explicitly defined initial conditions at the endpoints of the homogeneous discrete-representation curve—which include: tangent planes, tangents, values of curvature and torsion, the positions of the boundary quadruplets of points will be calculated.

Keywords: discretely represented curve; curvature defect; torsion defect; spatial curve; object properties.