

к. т. н., доцент **Кресан Т.А.**,  
tanyakresan@i.ua ORCID 0000-0002-8280-9502

доктор філософії **Хропост В.І.**,  
hropost97@ukr.net ORCID 0000-0001-9363-3955

к.т.н, доцент **Бабка В.М.**  
babka.v.m@gmail.com ORCID 0000-0003-4971-4285

к. т. н., доцент **Грищенко І.Ю.**,  
irgr@yahoo.com ORCID: 0000-0002-1000-9805

Національний університет біоресурсів і природокористування України

## **ВИКОРИСТАННЯ ПОЛІНОМА ЧЕТВЕРТОГО СТУПЕНЯ ПРИ КОНСТРУЮВАННІ НЕКРУГЛИХ КОЛІС**

*Об'єктом дослідження є процес конструювання замкнених некруглих коліс за заданою міжцентровою відстанню із зовнішнім коченням за умови, що воно відбувається без взаємного ковзання. Некруглі колеса служать центроїдами при проєктуванні зубчастих циліндричних передач із змінним передавальним числом. Передавальне число характеризується передавальною функцією. Якщо передавальне число є сталим, то центроїдами є кола. Передавальне число в такому випадку є відношенням радіусів цих кіл. Некруглі колеса можна конструювати за заданою передавальною функцією, яка визначається кінематикою виконавчих ланок механізму. В такому випадку некруглі колеса можуть бути незамкненими. В статті вирішується інша проблема – конструювання некруглих коліс за умови, що вони є замкненими. Для цього можна використовувати різні підходи. В статті розглянуто використання полінома четвертого ступеню для вирішення цієї задачі.*

*У некруглих коліс радіуси, під якими розуміються відстані від центрів обертання до точки контакту, є змінними. Необхідними умовами побудови некруглих коліс є стала величина суми цих радіусів при обертанні некруглих коліс, а також рівність пройдених шляхів, тобто рівність дуг, які проходять некруглі колеса, за час обертання. Пари коліс можуть мати однакове або різне число виступів і впадин. Це пояснюється застосуванням полінома четвертого ступеня, графік якого має вісь симетрії. Відповідно, і некруглі колеса або їх виступи теж мають вісь симетрії.*

*Результати отримано, виходячи із того, що при повороті колеса навколо центру обертання на заданий кут радіус змінюється від заданого мінімального значення, набуває заданого максимального значення і повертається до мінімального, тобто початкового. Так утворюється*

*виступ колеса. Кількість виступів теж задається. Профіль другого колеса будується за отриманими аналітичними залежностями.*

**Ключові слова:** *центроїди; некруглі колеса; зовнішнє кочення; міжцентрова відстань; довжина дуги, поліном.*

**Постановка проблеми.** Тематика створення пар некруглих коліс різної конфігурації є актуальною через їх багатогранне застосування у сучасному машинобудуванні та інших галузях. Вони є незамінними у складних механізмах із змінною передачею руху або нелінійністю у кінематиці. Зокрема, вони використовуються у приладах для точного вимірювання витрат рідин. Це має місце на нафтопереробних заводах та хімічних підприємствах, де потрібне точне вимірювання нафти або хімічних реагентів. Їх застосування у цій сфері дозволяє зменшувати коливання тиску, що є важливим для точного вимірювання. В машинобудуванні вони застосовуються у приводах технологічних машин із змінним передавальним відношенням [1]. З допомогою некруглих коліс можна змінювати напрямок обертання передач [2]. Відомі і інші приклади їх застосування у текстильних, поліграфічних машинах, маніпуляторах, крокових конвеєрах [1]. Це підтверджує важливість досліджень в даному напрямі, оскільки їх результати потрібні практиці.

**Аналіз основних досліджень і публікацій.** В основі конструювання центроїд некруглих коліс є кочення криволінійних контурів один по одному без ковзання. В частковому випадку такого кочення одним із контурів може бути пряма лінія. Широко відомими прикладами такого кочення є кочення кола по прямій при утворенні циклоїди і кочення прямої по колу при утворенні евольвенти. Одним з різновидів некруглих коліс може бути рівносторонній багатокутник. Його кочення по криволінійному профілю, який утворюється послідовним повторенням дуги симетричної кривої в прямолінійному напрямку, розглянуто в праці [2]. При цьому центр багатокутника при його коченні рухається по прямій. В праці [3] знайдено криволінійний замкнений профіль, по якому багатокутник котиться без ковзання і його центр описує коло. В такому випадку можливе взаємне кочення багатокутника і знайденої фігури з одночасним обертанням навколо нерухомих центрів. Зовнішнє і внутрішнє кочення центроїд з їх обертанням навколо нерухомих центрів розглянуто в праці [4]. Ведуча центроїда складаються із конгруентних дуг заданої симетричної кривої, якою є графік гіперболічного косинуса. Число цих дуг, тобто елементів центроїди, визначається видом зачеплення (внутрішнє або зовнішнє). При внутрішньому зачепленні кількість елементів внутрішньої центроїди повинна бути на одиницю меншою від кількості елементів зовнішньої центроїди. У статті [5] розроблено метод побудови пар некруглих коліс, які складаються з окремих симетричних дуг, що перетинаються під прямим кутом. Характерною особливістю центроїд,

розглянутих в праці [6], є те, що профіль кожної із них утворений послідовним з'єднанням однакових дуг однієї ж і тієї логарифмічної спіралі. Він подібний до профілю зубчастого колеса. В перерахованих працях центроїди утворені із послідовності конгруентних дуг кривих, які перетинаються під певним кутом. Питання, яке вирішується в даній статті, є побудова центроїд із дуг неперервної кривої, які стикаються між собою за високим порядком гладкості. Для цього використано графік полінома четвертого ступеня. Застосування кривих другого порядку при конструюванні центроїд зубчатих зачеплень з некруглими колесами висвітлено в праці [7]. Загальний метод синтезу зубчатих передач з не круглими шестернями розглянуто в праці [8]. Моделювання центроїд некруглих коліс розглянуто також у працях [9, 10]. Проведений аналіз способів побудови пар центроїд показує, що є доцільним їх конструювання із неперервної кривої.

**Мета і задачі дослідження.** Мета роботи: розробити спосіб конструювання пар центроїд із зовнішнім коченням при обертанні їх навколо нерухомих центрів із неперервної кривої з використанням полінома четвертого ступеня.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні задачі:

– математично описати контур ведучої центроїди за заданим числом виступів і впадин і відповідного контуру веденої центроїди;

– за отриманими результатами побудувати приклади пар центроїд із однаковим і різним числом виступів і впадин.

**Матеріали та методи проведення досліджень.** Об'єктом дослідження є процес конструювання центроїд некруглих коліс, контури яких описано неперервною кривою. Спрощенням дослідження є те, що конструювання центроїд відбувається не за заданою передавальною функцією, а за заданим контуром ведучої центроїди. Було висунуто гіпотезу, що неперервна крива контуру ведучої центроїди із заданим числом виступів і впадин може бути отримана за допомогою полінома четвертого ступеня.

До проведення досліджень залучено диференціальну геометрію плоских кривих. Їх математичний опис розглядається в полярній системі координат з переходом до декартової системи. На першому етапі розглядається конструювання ведучої центроїди. Розглянемо замкнені некруглі колеса, у яких полярний радіус  $\rho$  змінюється від мінімального до максимального значення у функції полярного кута  $\alpha$ . Таку зміну графічно представлено на рис. 1, а. В точках  $A$  і  $B$  полярний радіус  $\rho$  набуває мінімального значення, а полярний кут  $\alpha$  змінюється від  $-\pi$  до  $\pi$ , тобто полярний радіус обертається на  $360^\circ$ . Отже, крива буде замкнена і буде мати вісь симетрії. Замкнену криву можна будувати із окремих симетричних дуг (виступів). Наприклад, якщо ми хочемо, щоб таких виступів було  $n$ , то в точках  $A$  і  $B$  значення полярного кута має бути відповідно  $-\pi/n$  і  $\pi/n$ . При зміні полярного кута в межах  $-\pi/n \dots \pi/n$  ми

отримаємо симетричну дугу, послідовним поворотом якої на кут  $2\pi/n$  навколо полюса отримаємо замкнене складове некругле колесо із симетричними виступами.

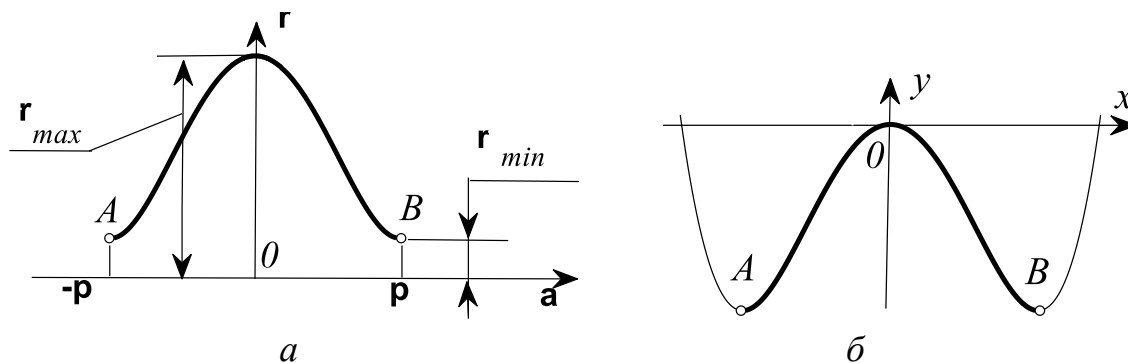


Рис. 1. Ілюстрації до вигляду графіка залежності  $\rho=\rho(\alpha)$ :

- а) бажаний вигляд графіка із значенням аргументу в крайніх точках;  
 б) частина графіка полінома четвертого ступеня, яка має бажаний вигляд

Графічній залежності, зображеній на рис. 1, а, відповідає дуга графіка полінома четвертого ступеня виду:

$$y = ax^4 - bx^2, \quad (1)$$

де  $a$  і  $b$  – сталі величини. Графік полінома (1) представлено на рис. 1, б. Ми будемо використовувати тільки частину графіка між точками  $A$  і  $B$ . Це є точки мінімуму, в яких значення аргумента повинне бути визначене, а саме  $x_A = -\pi/n$  і  $x_B = \pi/n$ . Оскільки в цих точках похідна функції дорівнює нулю, то вираз (1) продиференціюємо по змінній  $x$ , надамо змінній  $x$  значення  $x = \pi/n$  і знайдемо взаємозв'язок між сталими  $a$  і  $b$ :

$$b = \frac{2a\pi^2}{n^2}. \quad (2)$$

У виразі (1) замінимо  $y$  на  $\rho$ ,  $x$  на  $\alpha$  і значення сталої  $b$  візьмемо із (2). Після цього залежність  $\rho=\rho(\alpha)$  набуває вигляду:

$$\rho = a\alpha^4 - \frac{2a\pi^2}{n^2}\alpha^2 + c, \quad (3)$$

де  $c$  – ще одна стала, яка задає максимальне значення полярного радіуса  $\rho$  ( $\rho_{max}=c$ ). Мінімальне значення  $\rho_{min}$  залежить від величини сталої  $a$ . Зважаючи на те, що  $\rho_{min}$  набуває свого значення в точці  $B$  при  $\alpha=\pi/n$  (рис. 1,а), можна знайти величину сталої  $a$ , яка забезпечить необхідне значення  $\rho_{min}$ :

$$a = \frac{n^4}{\pi^4}(\rho_{max} - \rho_{min}). \quad (4)$$

У випадку, коли  $\rho_{max}=\rho_{min}$  стала  $a$  згідно (4) стає рівною нулеві і залежність (3) перетворюється у сталі значення, що відповідає колу.

Перейдемо від полярного рівняння (3) до параметричних рівнянь кривої:

$$\begin{aligned} x &= \left( a\alpha^4 - \frac{2a\pi^2}{n^2}\alpha^2 + c \right) \cos \alpha; \\ y &= \left( a\alpha^4 - \frac{2a\pi^2}{n^2}\alpha^2 + c \right) \sin \alpha. \end{aligned} \quad (5)$$

При побудові дуги кривої за рівняннями (5) кут  $\alpha$  змінюється в межах  $\alpha = -\pi/n \dots \pi/n$ .

*Приклади.* Розглянемо конструювання некруглих коліс для  $\rho_{max}=10$  і для різних значень числа  $n$ . Приймаємо значення сталої  $c=10$ . Розглянемо випадок для  $n=1$ . Нехай  $a=0,04$ . При зміні кута  $\alpha$  в межах  $\alpha = -\pi \dots \pi$  за рівняннями (5) будемо криву, яка представлена на рис. 2, а. За формулою (3) при  $\alpha=\pi$  можна знайти мінімальне значення радіуса  $\rho$ :  $\rho_{min}=6,1$ . Побудуємо криву для  $\rho_{min}=2$ . За формулою (4) знаходимо:  $a=0,082$ . Дана крива представлена на рис. 2,б.

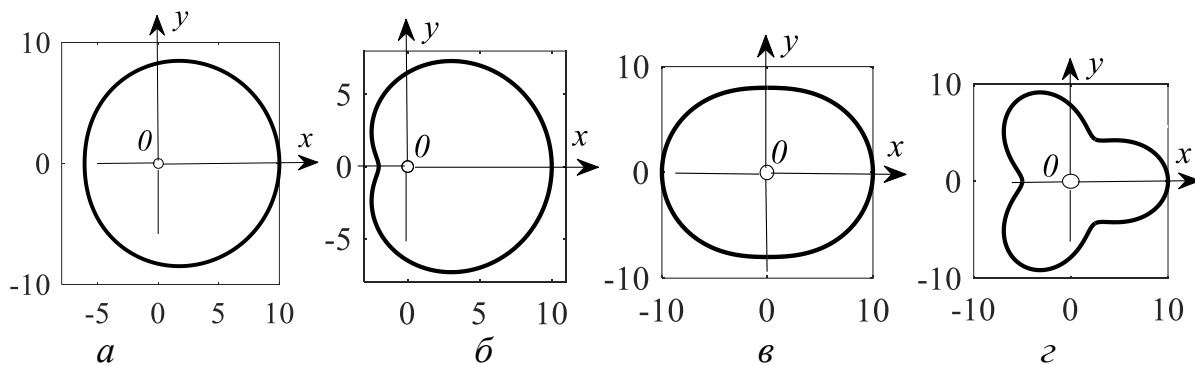


Рис. 2. Замкнені криві, побудовані для заданого значення  $\rho_{max}=10$ :  
 а)  $n=1$ ,  $\rho_{min}=6,1$ ;  
 б)  $n=1$ ,  $\rho_{min}=2$ ;  
 в)  $n=2$ ,  $\rho_{min}=8$ ;  
 г)  $n=3$ ,  $\rho_{min}=5$

Перейдемо до побудови складених кривих. На рис. 2, в побудована крива, яка складається із двох дуг, тобто при значенні  $n=2$ . Для неї  $\rho_{min}=8$ . Для  $n=3$  і  $\rho_{min}=5$  побудовано криву на рис. 2,г.

**Математичний опис пар центроїд із заданим числом виступів і впадин.** Початком координат (полюсом) однієї кривої, заданої радіус-вектором  $\rho=\rho(\alpha)$  є точка  $O$ , і другої, заданої радіус-вектором  $\rho_1=\rho_1(\varphi)$  є точка  $O_1$ . При нульовому значенні полярних кутів  $\alpha$  і  $\varphi$  криві дотикаються одна до одної в точці  $T$  (рис. 3). Якщо функції  $\rho$  і  $\rho_1$  будуть парними, як у нашому випадку (рис. 1), то при від'ємних значеннях полярних кутів полярні радіуси матимуть ті ж самі значення, що і при додатних кутах і крива буде симетричною (на рис. 3 симетрична вітка зображена штриховою лінією). При умові зовнішнього кочення кривих одна по одній без ковзання довжини дуг  $TT_1$  і  $TT_2$  повинні бути рівними. При  $\alpha=\varphi=0$

можна записати:  $\rho + \rho_1 = r$ , де через  $r$  позначена міжцентрова відстань  $OO_1$ . Поставимо умову, щоб ця рівність виконувалася для всіх відповідних точок обох кривих. Тоді можна записати:  $\rho_1 = r - \rho$ . Запишемо параметричні рівняння кривих:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \alpha; & x_1 &= (r - \rho) \cos \varphi + r; \\ y &= \rho \sin \alpha. & y_1 &= (r - \rho) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (6)$$

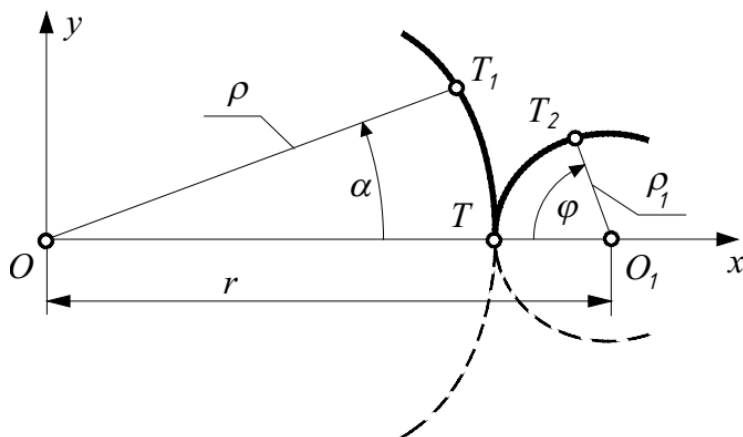


Рис. 3. Графічна ілюстрація до моделювання кривих із спільною точкою дотику при їх зовнішньому контакті

При конкретних значеннях кутів  $\alpha$  і  $\varphi$  згідно рівнянь (1) отримаємо точки на кривих, наприклад,  $T_1$  і  $T_2$  (рис. 3). Будемо вважати, що кут  $\varphi$  залежний від кута  $\alpha$ , тобто  $\varphi = \varphi(\alpha)$ . Залежність  $\varphi = \varphi(\alpha)$  знайдемо на основі рівності дуг  $TT_1$  і  $TT_2$  для поточного значення кута  $\alpha$ . Похідну довжини дуги для обох кривих знаходимо за відомою формулою:

$$\frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{x'^2 + y'^2}. \quad (7)$$

Для визначення похідних дуг за формулою (7) знайдемо похідні кривих (6):

$$\begin{aligned} x' &= \rho' \cos \alpha - \rho \sin \alpha; & x'_1 &= \rho' \cos \varphi - \varphi'(\rho - r) \sin \varphi; \\ y' &= \rho' \sin \alpha + \rho \cos \alpha. & y'_1 &= \rho' \sin \varphi + \varphi'(\rho - r) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

Після підстановки похідних (8) у формулу (7) одержимо вирази похідних дуг кривих:

$$\frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{\rho'^2 + \rho'^2}. \quad \frac{ds_1}{d\alpha} = \sqrt{\rho'^2 + \varphi'^2(\rho - r)^2}. \quad (9)$$

Прирівняємо вирази (9) між собою і розв'яжемо відносно залежності  $\varphi = \varphi(\alpha)$ :

$$\varphi = \int \frac{\rho}{r - \rho} d\alpha. \quad (10)$$

Залежність (10) в кінцевому вигляді можна отримати не для всіх можливих функцій  $\rho = \rho(\alpha)$ . В нашому випадку це зробити вдається, хоча

отриманий результат має дещо громіздкий вигляд. Після підстановки (3) у (10) і інтегрування отримаємо:

$$\varphi = \frac{rn^2}{2\sqrt{a^2\pi^4(c-r) - an^4(c-r)^2}} \left( B \operatorname{Arctanh} \frac{\sqrt{a}}{A} \alpha - A \operatorname{Arctanh} \frac{\sqrt{a}}{B} \alpha \right) - \alpha, \quad (11)$$

де 
$$A = \sqrt{\frac{a\pi^2}{n^2} + \sqrt{a\left(\frac{a\pi^4}{n^4} + r - c\right)}}; \quad B = \sqrt{\frac{a\pi^2}{n^2} - \sqrt{a\left(\frac{a\pi^4}{n^4} + r - c\right)}}.$$

**Приклади побудови пар центроїд із однаковим і різним числом виступів і впадин.** Побудову почнемо із некруглих коліс, для яких число виступів  $n$  є рівним. Нехай  $n=1$  (рис. 2, а, б). В такому випадку у виразі (11) кут  $\alpha$  повинен змінюватися в межах  $\alpha = -\pi \dots \pi$ , тобто крива (назвемо її ведучою центроїдою) має бути замкненою. В таких же межах повинен змінюватися кут  $\varphi$ , щоб друга крива (назвемо її веденою центроїдою) теж була замкнена. При  $\alpha=0$  із формули (11) отримуємо  $\varphi=0$ . При лінійній зміні кута  $\alpha$  зміна кута  $\varphi$  буде нелінійною, але кінцеві значення мають бути рівними  $\pi$ . При довільних сталих  $a, r, c$  цього не відбудеться, тому потрібно їх підбирати відповідним чином. Оскільки  $c=\rho_{max}$ , а від сталої  $a$  залежить величина  $\rho_{min}$ , то підбирати потрібно міжцентрову відстань  $r$ . Розв'язати рівність (11) відносно  $r$  не вдається, тому знаходити потрібне значення  $r$  потрібно чисельними методами. Наприклад, для кривої (рис. 2, а) підставимо в (11)  $a=0,04, n=1, c=10, \alpha=\pi, \varphi=\pi$  і чисельними методами знаходимо:  $r=16,79$ . Ведену центроїду  $x_1, y_1$  будуюмо за рівняннями (6), підставивши у них вирази  $\rho=\rho(\alpha)$  із (3) і  $\varphi=\varphi(\alpha)$  із (11). Аналогічно будуюмо ведену центроїду для кривої, представлені на рис. 2, б. Результат побудови ведучої і веденої центроїд із спільним контактом показано на рис. 4.

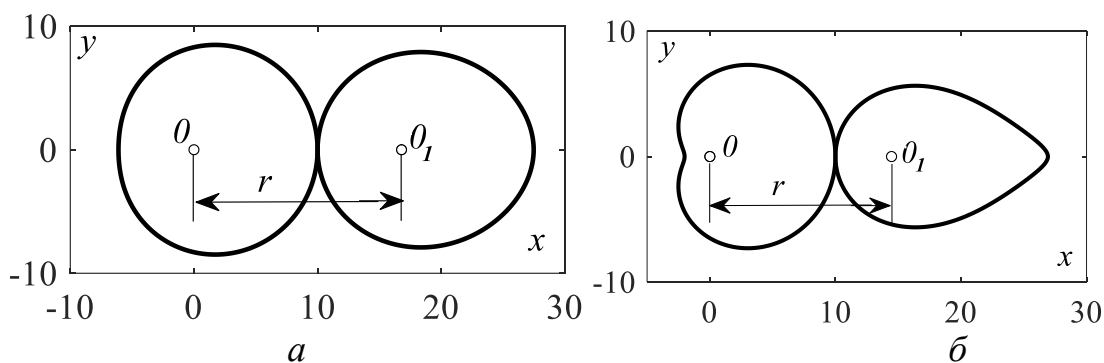


Рис. 4. Ведуча і ведена центроїди, побудовані при  $\rho_{max}=10, n=1$ :  
 а)  $\rho_{min}=6,1, r=16,79$ ; б)  $\rho_{min}=2, r=14,47$

При  $n>1$  ведуча центроїда складатиметься із  $n$  однакових дуг. З такого ж числа дуг складатиметься і ведена центроїда. При зміні кута

$\alpha = -\pi/n \dots \pi/n$  кут  $\varphi$  теж повинен змінюватися в цих межах. В такому випадку дузі ведучої центроїди відповідатиме дуга веденої центроїди, як показано на рис. 5, б для  $n=3$ . Дуги обох кривих для наочності зображено на центроїдах тонкими лініями. Щоб отримати замкнені криві, ці дуги потрібно послідовно повернути навколо своїх центрів  $O$  і  $O_1$  на кут  $2\pi/n$ , тобто на  $120^\circ$ . Міжцентрова відстань  $r$  знаходиться аналогічно, як і в попередньому випадку для  $n=1$ . При цьому у рівняння (11) підставляємо значення  $a$ ,  $c$ ,  $n$  і  $\alpha = \pi/n$ ,  $\varphi = \pi/n$ . Наприклад, для  $n=3$ ,  $c = \rho_{max} = 10$ ,  $a = 4,158$ , що відповідає  $\rho_{min} = 5$  згідно формули (4),  $\alpha = \varphi = 60^\circ$ , отримаємо  $r = 16,05$ . На рис. 5 побудовано пари некруглих центроїд для різних значень  $n$  із вказаними величинами  $\rho_{max}$ ,  $\rho_{min}$  і  $r$ .

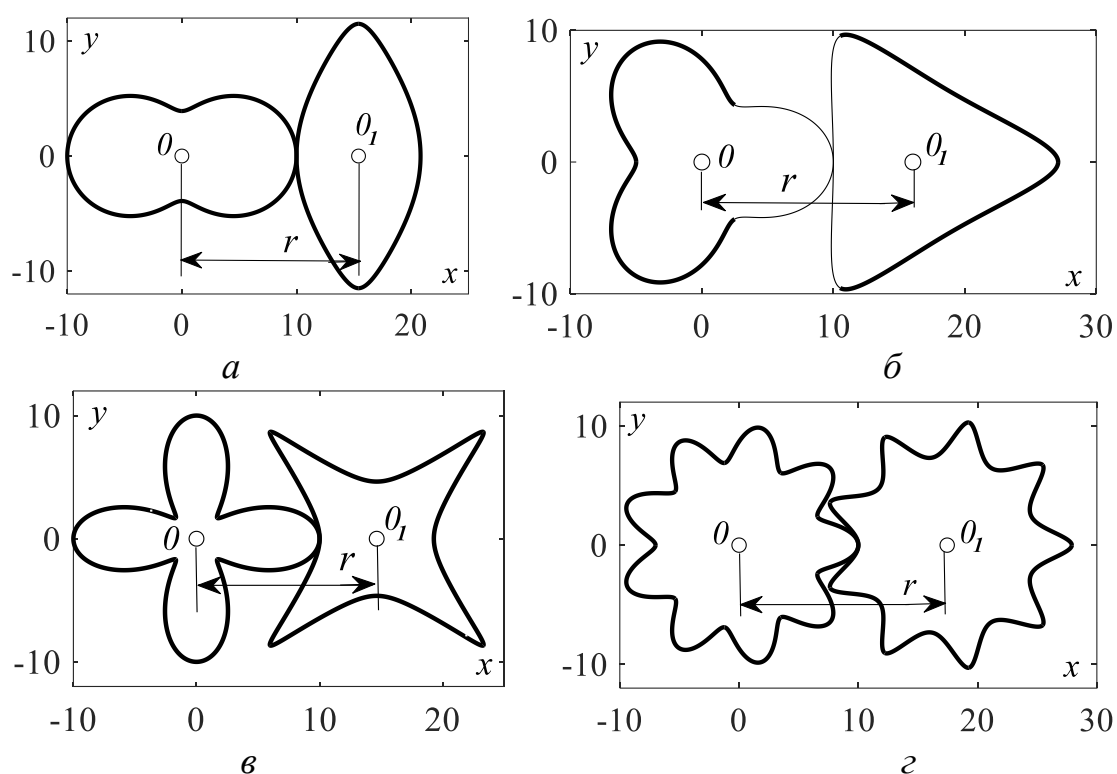


Рис. 5. Пари некруглих коліс, побудовані для  $\rho_{max} = 10$  і різних значень  $r$ :

а)  $\rho_{min} = 4$ ,  $r = 15,41$ ;

б)  $\rho_{min} = 5$ ,  $r = 16,05$ ;

в)  $\rho_{min} = 2,4$ ,  $r = 14,64$ ;

г)  $\rho_{min} = 7$ ,  $r = 17,45$

Перейдемо до пар коліс із різним числом виступів. Число виступів на веденій центроїді позначимо літерою  $m$ . На рис. 6 зображені пари центроїд для  $n=1$  і різних значеннях  $m$ .

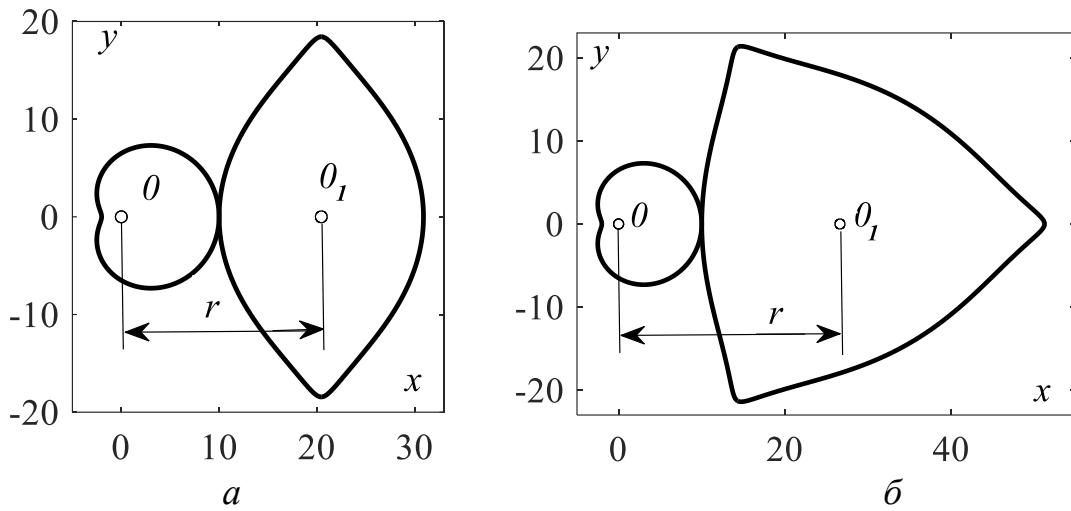


Рис. 6. Ведуча і ведена центроїди, побудовані при  $\rho_{max}=10$ ,  $\rho_{min}=2$ ,  $n=1$ :  
 а)  $m=2$ ,  $r=20,45$ ;                      б)  $m=3$ ,  $r=26,61$

Отже для ведучої центроїди кут  $\alpha=\pi$ , а кут  $\varphi=\pi/m$ . За значеннями цих кутів чисельними методами знаходять міжцентрову відстань  $r$  за допомогою формули (11). При  $m=2$  (рис. 6, а) ми отримуємо незамкнену криву веденої центроїди, яку потрібно повернути навколо центра  $O_1$  на  $180^\circ$ , а при  $m=3$  – послідовно повернути два рази на  $120^\circ$  (рис. 6, б).

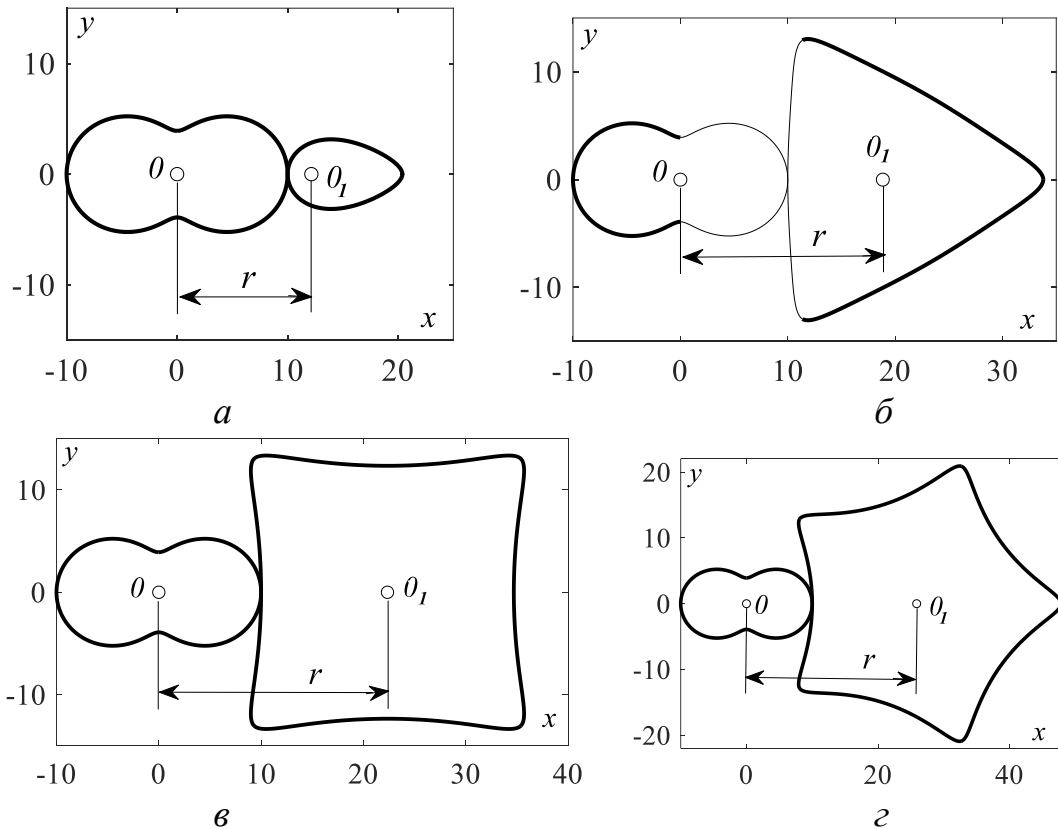


Рис. 7. Пари некруглих коліс, побудовані для  $\rho_{max}=10$ ,  $\rho_{min}=4$ ,  $n=2$ :  
 а)  $m=1$ ,  $r=12,15$ ;                      б)  $m=3$ ,  $r=18,85$ ;  
 в)  $m=4$ ,  $r=22,35$ ;                      з)  $m=5$ ,  $r=25,88$

При повному оберті ведучої центроїди ведена зробить півоберта у першому випадку і третину оберту у другому. Конструювання пар центроїд можна узагальнити для різного числа  $n$  і  $m$ . На рис. 7 побудовані пари центроїд для  $n=2$  і різних значень  $m$ , а на рис. 8 – для  $n=3$  і різних значень  $m$ .

На рис. 7, б побудована пара центроїд для  $n=2$  і  $m=3$ . Дуги однакової довжини, які обкочуються одна по одній при обертанні навколо своїх центрів, виділено тонкою лінією. Дуга ведучої центроїди побудована при зміні кута  $\alpha$  в межах  $\alpha = -\pi/2 \dots \pi/2$ . Дуга веденої центроїди побудована при зміні кута  $\varphi$  в межах  $\varphi = -\pi/3 \dots \pi/3$ . Таким чином, при визначенні міжцентрової відстані за формулою (11) величину кута  $\varphi$  потрібно визначати із виразу:  $\varphi = \pi/m$ .

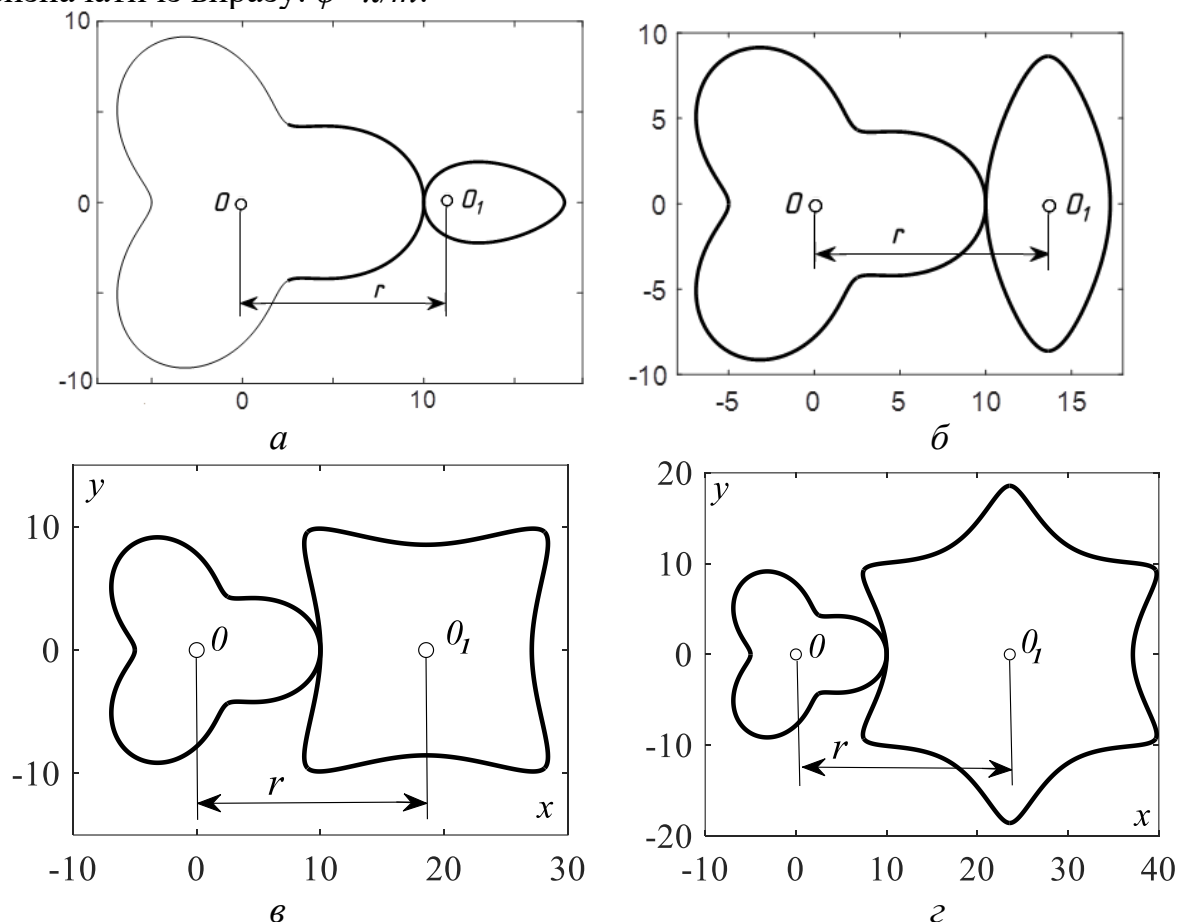


Рис. 8. Пари некруглих коліс, побудовані для  $\rho_{\max}=10$ ,  $\rho_{\min}=5$ ,  $n=3$ :

а)  $m=1$ ,  $r=11,38$ ;

б)  $m=2$ ,  $r=13,63$ ;

в)  $m=4$ ,  $r=18,54$ ;

г)  $m=6$ ,  $r=23,57$

Для наочності на рис. 7, б, а також на рис. 8, а дуги рівної довжини зображено тонкими лініями.

**Обговорення отриманих результатів математичного опису та побудови центроїд з допомогою полінома четвертого ступеня.** Для побудови пар центроїд із зовнішнім коченням використано графік

полінома четвертого ступеня. Завдяки тому, що він має вісь симетрії і спряження окремих дуг центроїд відбувається у симетричних точках, центроїду можна прирівняти до неперервної кривої. Наприклад, в точках  $A$  і  $B$  (рис. 1) чисельні значення будь-якої похідної кривої (3) будуть рівними. Очевидно це стосується і кривої (5), у якої відповідні дуги кривих після переходу від декартової системи координат (3) до полярної (5) із деформацією кривої зберігають ці властивості. При цьому точки сусідніх дуг кривих центроїди є спільними точками спряження з однаковими диференціальними характеристиками.

Є різні підходи до конструювання некруглих коліс. При цьому задається вид кривої, з якої утворюється ведуче колесо, а ведене знаходиться за умови сталої міжцентрової відстані і рівності дуг коліс. В праці [3] в ролі ведучого колеса розглянуто рівносторонній багатокутник, тобто його профіль утворений відрізками прямої. Ведене колесо має таку ж кількість криволінійних сторін, які перетинаються під таким же кутом, як і сторони багатокутника. Якщо багатокутником є квадрат, то на обох колесах існують прямі кути. Мінімальна їх кількість – чотири, трикутного колеса не може бути, оскільки кут перетину елементів коліс не може бути гострим. При збільшенні числа сторін багатокутника некруглі колеса наближаються до круглих. У праці [4] профіль ведучого колеса утворюється за допомогою гіперболічного косинуса. Цією залежністю описується зміна радіус-вектора в полярній системі координат, а сама крива, яку описує кінець радіус-вектора, є складовою дугою колеса. Дуги можуть перетинатися під заданим кутом, який не може бути гострим. При такому конструюванні виступами є випуклі криві, а впадинами – вешини кутів або навпаки. Число кутів на обох колесах дорівнює числу таких елементів. Конструювання ведучого колеса із дуг логарифмічної спіралі розглянуто в праці [6]. Його профіль подібний до профілю зубчастого колеса. Виступами і впадинами є вершини кутів перетину сусідніх дуг, що утворюють колесо. Таким чином кількість кутів удвічі більше кількості елементів коліс. Спільною властивістю описаних способів конструювання пар некруглих коліс є наявність у них кутів перетину сусідніх дуг. Якщо некруглі колеса використовуються в ролі центроїд як основи для виготовлення зубчастих коліс, то їх профіль має гладеньким, описаним плавною неперервною кривою. Використання полінома четвертого ступеня дозволило це зробити.

Для запропонованого підходу конструювання некруглих коліс існують обмеження. Форму кривої, подібну до кривої на рис. 1, можна описати і іншими залежностями. Однак в цьому випадку можна отримати вираз, який не вдасться проінтегрувати згідно формули (10).

Недоліком дослідження є те, що міжцентрова відстань не задається, а знаходиться в залежності від конструктивних параметрів некруглих коліс. Розвиток даного дослідження полягає в конструюванні пар некруглих коліс за заданою міжцентровою відстанню.

**Висновки.** Контур ведучого некруглого колеса задається залежністю радіус-вектора від кута його повороту в полярній системі координат. Цією залежністю обрано поліном четвертого ступеня, що дозволило описувати контур колеса плавною кривою із заданим числом виступів і впадин. Мінімальне значення радіуса, яке відповідає впадинам, і максимальне значення, яке відповідає виступам, можна задавати через значення постійних полінома. Контур веденого колеса визначається на основі сталого значення міжцентрової відстані і рівності довжин контурів коліс. Це забезпечує їх взаємне перекочування без ковзання при одночасному обертанні навколо нерухомих центрів.

На основі отриманих результатів побудовано пари некруглих коліс різної конфігурації. Число виступів і впадин на ведучому і веденому колесах може бути однаковою або різною. В залежності від кількості виступів  $n$  в полярній системі будується відповідна дуга ведучого колеса, яка послідовно повертається навколо початку координат на кут  $2\pi/n$ . Ведене колесо будується подібним чином з тією різницею, що його відповідна дуга знаходиться із відповідності між кутами повороту коліс і рівності дуг. Міжцентрова відстань залежить від числа виступів обох коліс і знаходиться розв'язуванням рівняння чисельними методами. Такі колеса можуть служити центроїдами при проектуванні зубчатих зачеплень з некруглими колесами.

## Література

1. Литвиняк М.Я., Юрчишин І.І. Моделювання роботи зубчастих передач із змінним передавальним відношенням для приводів технологічних машин. *Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні*. Вип. 54. 2020. С. 37 – 47.  
URL: <https://ena.lpnu.ua:8443/server/api/core/bitstreams/d27cdfcc-6f2c-42a8-ba22-b7b7800721c8/content>
2. Yaxin Yu., Jikun Liu, Bingliang Ye., Gaohong Yu., Xuejun Jin, Liang Sun and Junhua Tong. (2019). Design and Experimental Research on Seedling Pick-Up Mechanism of Planetary Gear Train with Combined Non-circular Gear Transmission. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*. 32:49. URL: <https://doi.org/10.1186/s10033-019-0357-3>
3. Kresan T., Pylypaka S., Ruzhylo Z., Rogovskii I., Trokhaniak O. (2020). External rolling of a polygon on closed curvilinear profile. *Acta Polytechnica*. 60(4). Pp. 313 – 317.  
URL: <https://ojs.cvut.cz/ojs/index.php/ap/article/view/6637>
4. Kresan, T., Pylypaka, S., Hryshchenko, I., & Ya. S. Kremets. (2020). Simulation of centroids of non-circular wheels with internal and external rolling from arcs of symmetrical curves. *Machinery & Energetics*. 11(4). 23-32. URL: <https://surl.li/dfngf>

5. Kresan T., Pylypaka S., Volina T., Rybenko I., Tatsenko O. (2023). Non-circular Wheels from Congruent Arcs. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Pp. 44–53. URL: [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-16651-8\\_5](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-031-16651-8_5)
6. Kresan T., & Pylypaka S. (2021). Internal rolling of non-circular centroids formed from the arcs of logarithmic spiral. *Machinery & Energetics*. 12(1), Pp. 109-119. URL: <https://surl.li/jyqala>
7. Gert F. Bär. (2009). Two Synthesis Methods for Non-Circular Cylindrical Gears. *J. Geometry Graphics*. 13/1. 101–112. URL: <https://www.heldermann-verlag.de/jgg/jgg13/j13h1baer.pdf>
8. K.-H. (2009). Modler et. al.: General Method for the Synthesis of Geared Linkages with NonCircular Gears. *Mechanism and Machine Theory* 44, 726–738 URL: <https://surl.li/rymewv>
9. B. Laczik. Design and Manufacturing of Non-Circular Gears by Given Transfer Function. [Електронний ресурс] URL: <http://www.hexagon.de/pdf/noncgear.pdf>
10. D. Mundo, G. A. Danneli. Use of Non-Circular Gears in Pressing Machine Driving Systems [Електронний ресурс] URL: <http://www.wseas.us/e-library/conferences/udine2004/papers/483-172.pdf>

Ph. D., assoc. prof **Tetiana Kresan**,  
tanyakresan@i.ua ORCID 0000-0002-8280-9502

Ph. D. **Vyacheslav Hropost**,  
hropost97@ukr.net ORCID 0000-0001-9363-3955

Ph. D., assoc. prof **Vitaliy Babka**  
babka.v.m@gmail.com ORCID 0000-0003-4971-4285

Ph.D., assoc. prof. **Iryna Hryshchenko**,  
irgr@yahoo.com, ORCID: 0000-0002-1000-9805

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

## APPLICATION OF A FOURTH-DEGREE POLYNOMIAL IN THE DESIGN OF NON-CIRCULAR WHEELS

*The object of the study is the process of designing closed non-circular wheels with a given center distance and external rolling, provided that it occurs without mutual sliding. Non-circular wheels serve as centroids in the design of cylindrical transmissions with a variable gear ratio. The gear ratio is characterized by a transfer function. If the gear ratio is constant, the centroids are circles; in this case, the gear ratio is the ratio of the radii of these circles. Non-circular wheels can be designed based on a given transfer function determined by the kinematics of the mechanism's executive links. In such instances, the non-circular wheels may be open. This article addresses a different problem: the design of non-circular wheels under the condition that*

*they are closed. Various approaches can be used for this purpose. The article considers the use of a fourth-degree polynomial to solve this problem.*

*In non-circular wheels, the radii (defined as the distances from the centers of rotation to the point of contact) are variable. The necessary conditions for constructing non-circular wheels are a constant sum of these radii during rotation and the equality of the paths traveled, i.e., the equality of the arcs passed by the non-circular wheels during the rotation time. Pairs of wheels may have the same or different numbers of lobes (peaks and valleys). This is explained by the application of a fourth-degree polynomial, the graph of which has an axis of symmetry. Accordingly, the non-circular wheels or their lobes also possess an axis of symmetry.*

*The results are obtained based on the premise that when a wheel rotates around its center of rotation by a given angle, the radius changes from a specified minimum value, reaches a specified maximum value, and returns to the minimum (initial) value. This forms a lobe of the wheel. The number of lobes is also predefined. The profile of the second wheel is constructed using the derived analytical dependencies.*

*Keywords: centroids; non-circular wheels; external rolling; center distance; arc length; polynomial.*