УДК 514.18
DOI: 10.32347/0131-579x.2026.110.184-202

к. т. н., професор **Богушко О.А.**[1]
oleksandr.bogushko@gmail.com,
к. т. н., професор **Малиновський В.І.**[2]
valerii_malynovskyi@lnam.edu.ua, ORCID: 0000-0002-9084-9248

[1]Київський національний університет технологій та дизайну, Україна
[2]Косівський державний інститут декоративного мистецтва

ЗНАМЕНИТІ ЗАДАЧІ ДАВНИНИ. ПИТАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАНОСТІ ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ ЗА ДОПОМОГОЮ ЦИРКУЛЯ ТА ЛІНІЙКИ

В роботі розглянуто та проаналізовано історичний аспект постановки і розвитку проблеми вирішення відомих задач древності: квадратури круга, кругатури квадрата, подвоєння куба, трисекції кута та ділення кола на рівні частини (побудова правильних багатокутників). Складність проблеми була закладена у самій вихідній умові: вирішити задачу виключно за допомогою циркуля та немаркованої лінійки. В класичному розумінні термін "побудова з використанням тільки лінійки" означає, що лінійку застосовують виключно для проведення прямих і вона не має одиниць виміру. Сутність вирішення основної задачі теорії побудов циркулем та лінійкою, полягає в точному описі графічних побудов, які можливо виконати та в описі алгоритму, який дає можливість розв'язати будь-яку конкретну задачу або дізнатись, що ця задача невирішувана. В статті розглянуто умови цих відомих задач та методи їхнього вирішення від давніх часів до сьогодення. Так, перша задача: квадратура круга, сутність якої полягає в знаходженні алгоритму побудови за допомогою циркуля і лінійки квадрата, рівновеликого за площею площі заданого круга. Зворотна їй задача 2: кругатура квадрата – побудова круга, площа якого б дорівнювала площі даного квадрата (антиквадратура) та задача 3: подвоєння куба – побудова куба з об'ємом вдвічі більшим від вихідного куба. На основі аналізу існуючих методів та алгоритмів розв'язання вищевказаних задач, запропоновано дієві геометричні алгоритми графічних побудов, суто циркулем та лінійкою, які супроводжуються аналітичними розрахунками величин можливих похибок геометричних побудов.

Розв'язок цих задач базується на застосуванні ключових способів геометричних перетворень, зокрема - чотирикутному ключі пропорційності, який повною мірою розкриває універсальні можливості застосування ключових способів геометричних перетворень та розширює діапазон задач, які можна вирішувати з мінімальною похибкою та лаконічними побудовами, застосовуючи ці ключові способи перетворень.

***Ключові слова**: ключові перетворення; чотирикутний ключ пропорційності; квадратура круга, циркуль; лінійка; графічний алгоритм; похибка геометричних побудов.*

Постановка проблеми. Історія пошуків вирішення задачі квадратури круга налічує чотири тисячоліття, її можна порівняти з історією розвитку всесвітньої культури людства. Складність проблеми була закладена у самій вихідній умові: вирішити задачу виключно за допомогою циркуля та лінійки без штрихів кратних одиниці вимірювання довжини. Відомо, що в класичному розумінні термін "побудова з використанням тільки лінійки" означає, що лінійку застосовують виключно для проведення прямих і вона не має одиниць виміру [1]. Побудовою за допомогою циркуля і лінійки, вважається послідовність, яка складається зі скінченного числа описаних кроків. Задача на побудову вважається вирішуваною, якщо сукупність точок, які необхідно визначити для вирішення цієї задачі, складається лише з таких точок, які можна побудувати за допомогою циркуля та лінійки [2, 3, 4].

Сама теорія геометричних побудов за допомогою циркуля і лінійки виникла, як результат безуспішних спроб вирішити вищевказаними побудовами «знаменитих» задач древності: квадратура круга, подвоєння куба та трисекція кута. Сутність вирішення основної задачі теорії побудов циркулем та лінійкою, полягає в точному описі графічних побудов, які можливо виконати та в описі алгоритму, який дає можливість розв'язати будь-яку конкретну задачу або дізнатись, що ця задача невирішувана.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Особлива увага протягом багатьох століть до «знаменитих задач древності», зумовлена практичними потребами людей та, здавалось би, простими вихідними умовами до їх вирішення, доступними на той час засобами: побудова виключно лінійкою та циркулем. До числа цих знаменитих задач належать: квадратура круга, подвоєння куба та трисекція кута. Деякі автори, не безпідставно, долучають до числа цих задач також: ділення кола на рівні частини (побудова правильних багатокутників) та квадратуру луночок [5, 6, 7].

Задача № 1: Квадратура круга.

Сутність задачі полягає в знаходженні алгоритму побудови за допомогою циркуля і лінійки квадрата, рівновеликого за площею площі заданого круга.

З найважливіших досліджень у пошуку рішення задачі, на думку *Фернанда Рудіо* [8], слід відзначити праці Архімеда, Гюйгенса, Ламберта, Лежандра.

Так, Фернанд Рудіо поділяє історію задачі на 3 періоди.

В *перший* період – від древніших часів до відкриття диференціальних і інтегральних обчислень – розв'язок задачі зводили до "виснаження" – використання вписаних та описаних багатокутників. Архімед математично обґрунтував цей метод, а Гюйгенс довів його до досконалості. Розглядати описану в цей період Гіппієм трансцендентну криву квадратрису не будемо, оскільки її не можна побудувати за допомогою циркуля та лінійки.

Міркування Антифонта про “вписування” послідовно в круг квадрата, восьми-, шістнадцати- і так далі кутників, приводить до збільшення кількості графічних побудов та величини похибки. Пропозиція Брізона використовувати описані багатокутники є цінною, скоріш за все, лише впровадженням поняття про верхню та нижню межу.

Роботи вчених, які в цей період займались розрахунками, а не побудовами не наведені [8].

У *другому* періоді – до доведення Ламбертом ірраціональності числа π – праці Ньютона, Лейбніца, Гюйгенса, Ферма та ін. привели до перевороту в математиці, що відобразилось також на теорії круга. Основна задача – аналітичне визначення відношення довжини кола до діаметра. Новий напрямок досліджень про вимірювання круга вказав Л. Ейлер.

В *третій* період – від І. Г. Ламберта до початку XIX століття. Доведення Ламбертом, Лежандром і Ейлером ірраціональності чисел π та e просунуло вирішення питання про можливість побудови квадратури круга та окреслили шляхи подальших досліджень. Однак, Ламберт називав дослідників, що займались рішенням задачі “квадратурщиками”-дилетантами [8, 9].

Архімед запропонував вирішувати задачу за допомогою прямокутного трикутника з катетами, що дорівнюють радіусу та довжині кола (рис. 1).

Диностат же (IV ст. до н. е.) для спрямлення чверті кола AD (рис. 2) використовував основну властивість квадратриси [7]: $(\overset{\frown}{AM}):CD:CM$, звідки довжина кола $L_к= 4(CB^2/CM)$. Проте, її не будемо розглядати, оскільки доведеться вдатись до розрахунків, або за формулою, в якій присутнє ірраціональне число π.

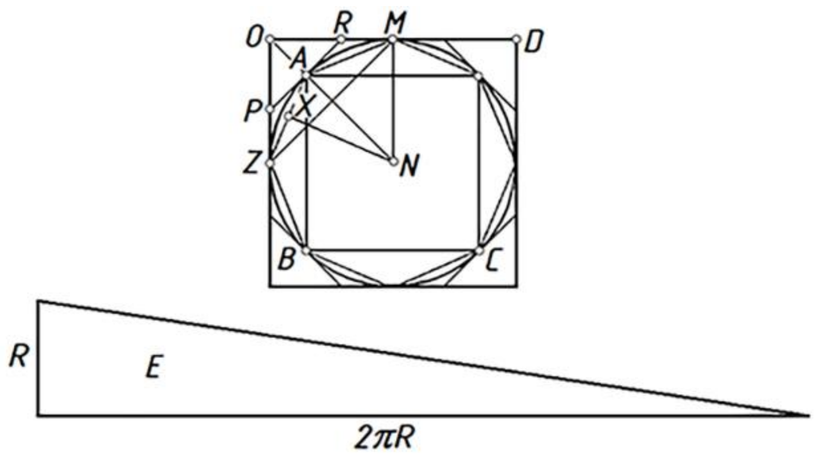

Рис.1. Твердження Архімеда

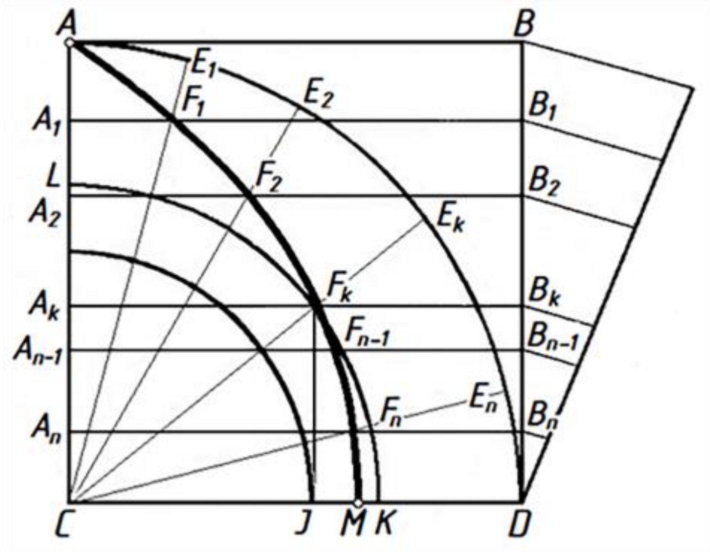

Рис. 2. Принцип побудови квадратриси

Дослідження щодо вирішення зазначеної задачі також проводились в XIX та XX століттях й були характерними для сучасного періоду історії цієї задачі.

Математик П. Л. Ванцель писав: "…нам здається, що ще не було доведено, що знамениті задачі древності не можуть бути вирішені тими звичайними геометричними побудовами, з якими їх зазвичай пов'язують. І все ж, дві з п'яти розглянутих задач були вирішені"[7, с. 161].

В 1882 р. математик Фердінант Ліндеман вирішив задачу трансцендентності числа π та остаточно визначив долю задачі про квадратуру круга. Він погоджувався з доказом К. Вейєрштрасса (1885 р.), що "дуга круга, хорда якої, виміряна радіусом цього круга, має алгебраїчно виражену довжину, не може бути випрямлена геометричною побудовою за допомогою лише алгебраїчних кривих і побудов, так само, як відповідний цій дузі сектор за допомогою таких побудов не може бути звернений в рівновеликий квадрат" [10].

З величезної кількості сучасних дослідників цієї проблематики слід відзначити дослідження М.О. Танчука. Автор, користуючись модельним методом [11, 12], за допомогою циркуля і лінійки кут у 90° ділить у відношенні 11/7 і виконує побудову квадратури круга, звичайно, наближено (рис. 3). До того ж, він припускає, що для обчислень довжини кола і площі круга, обмеженого цим колом, існують різні значення числа π. При виведенні формул для обчислення довжини кола і площі круга, обмеженого цим колом, автор отримав дві різні числові послідовності і, тому, гіпотетична константа π в отриманих формулах: $C=2\pi R$ і $S=\pi R^2$, можливо, може мати різні, за величиною, значення.

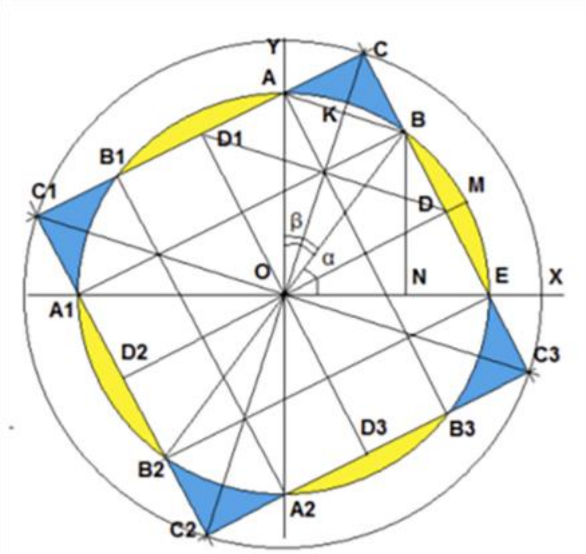

Рис. 3. Квадратура круга (Танчук М.О.)

Ліндон О. Бартон з університету штату Делавер, Дувр, США у своєму дослідженні пропонує графічні алгоритми побудови квадратури круга будь-якого радіуса [13,14]. Цей алгоритм базується на механіці колеса, що котиться (циклоїда, рис. 4) та на застосуванні евольвентного профілю до круга довільного радіуса (використовуючи лише нерозмічену лінійку та циркуль, утворює квадрат, рівновеликий за площею заданому кругу. Одержаний результат демонструє (рис. 5), що цей алгоритм не тільки справедливий для квадратури круга будь-якого радіуса, але також здатний досягти абсолютних результатів (незалежно від числа пі (π), за скінченну кількість кроків).

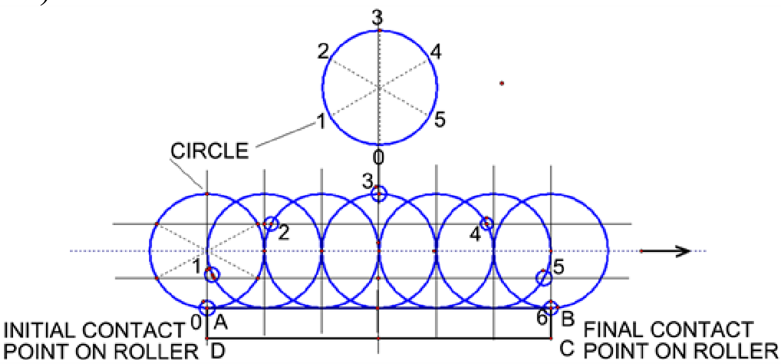

Рис. 4. Типова конструкція циклоїди, що показує один оберт точки на колі кочення

Спосіб цікавий і абсолютно точний з аналітичної точки зору, але враховуючи графічні умови її розв'язання він недосконалий. Складність полягає у точності визначення периметра круга, який "котиться по прямій". Тому, побудову циклоїди починають з відкладання на прямій відрізка, який дорівнює периметру круга.

На рис. 4 автор показує графічний спосіб побудови циклоїди для визначення сторони *AB* прямокутника *ABCD*. За неточним способом побудови, автор після поділу кола на n-частин (у даному випадку на 6), пропонує використовувати не величину дуги сектора, а хорду, що призводить до зменшення сторони *AB*. Величина периметра круга, радіус якого у автора $r = 2$ см, за відомою формулою дорівнює 12,56637 см, а автор пропонує відкласти 12,7 см. Традиційно для підвищення точності круг поділяють на 12 частин.

Тоді, за формулою площа круга $S_{кр}$=12,56637 см^2, а у автора $S_{пр}$ = 12,7 см^2. Відносна ж похибка: $П_B=(S_{кр}–S_{пр})/S_{пр}$=0,0106 – зіпсувала гарне враження про запропонований спосіб (Табл.1). Слід відзначити, що наведений спосіб перетворення прямокутника *ABCD* в квадрат *CIJF* цікавий і доречний.

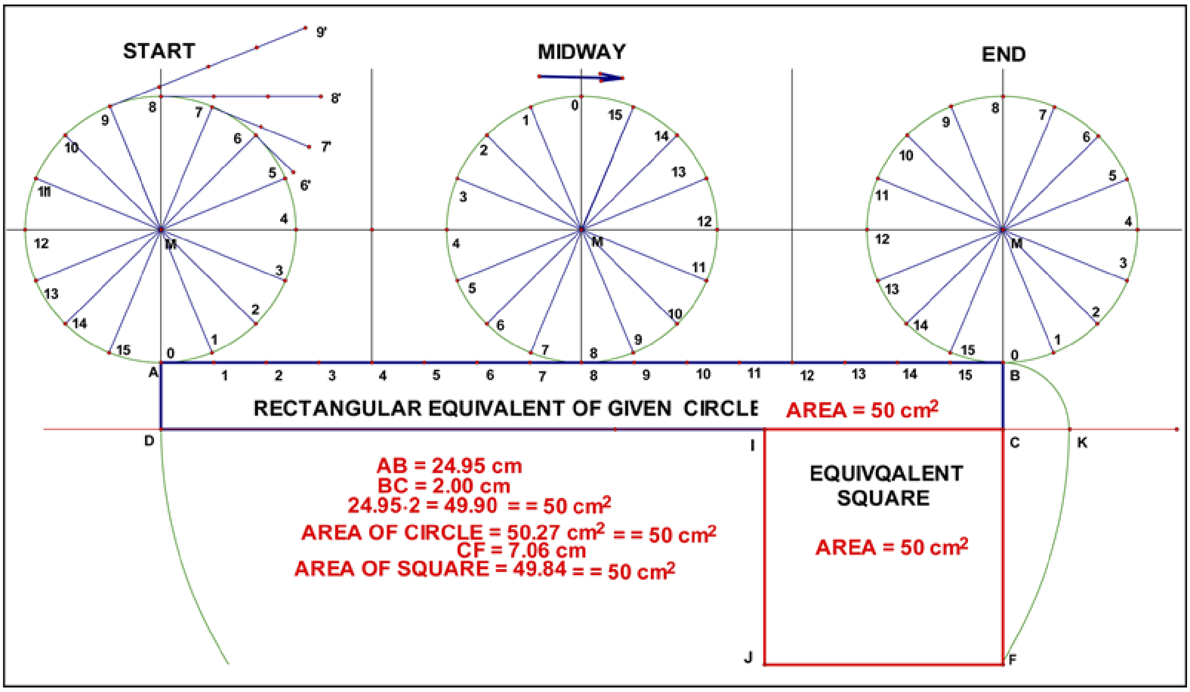

Рис. 5. Квадратура круга (Ліндон О. Бартон).

Таблиця 1.

Параметризація квадратури круга за Ліндоном О. Бартоном

R_1, см	α	Хорда	L дуги	L кола	R_1, см	S у автора	S теор.	Похибка
2	60°	2,00	2,094	12,566	12,70	12,70	12,566	0,0106

Ціль статті. Мета даної статті не обговорювати чи заперечувати відомі теоретичні доведення П.Л. Ванцеля [15], А. Дадлі та інших, які доволі абстрактні, а просто продемонструвати розроблені дієві алгоритми графічних побудов суто циркулем та лінійкою, які супроводжуються аналітичними розрахунками величин можливих похибок геометричних побудов. Також, розкрити універсальні можливості застосування ключових способів геометричних перетворень, удосконалити їх та розширити діапазон задач, які можна вирішувати з мінімальною похибкою, застосовуючи ці ключові способи перетворень.

Основна частина.

Рішення задачі № 1: Квадратура круга.

У статті пропонується новий підхід до вирішення задачі, який кардинально відрізняється від вищеописаних, а аналітичний алгоритм дозволяє з високою точністю визначити похибку з 12-14-и графічних побудов. Для розв'язання задачі використовуємо чотирикутний ключ пропорційності [16] – окремий випадок методу конкуруючих поверхонь, розроблений проф. І.І. Котовим [17, 18].

Геометричний алгоритм 1.

Через центр круга O проводимо горизонтальну і вертикальну лінії Ox та Oy – осі координат (Рис. 6). Будуємо описаний квадрат $OADD_o$. Проводимо бісектрису прямого кута та визначаємо точки B та D. Поворотом радіуса OD до суміщення з Ox визначаємо положення точки D'.

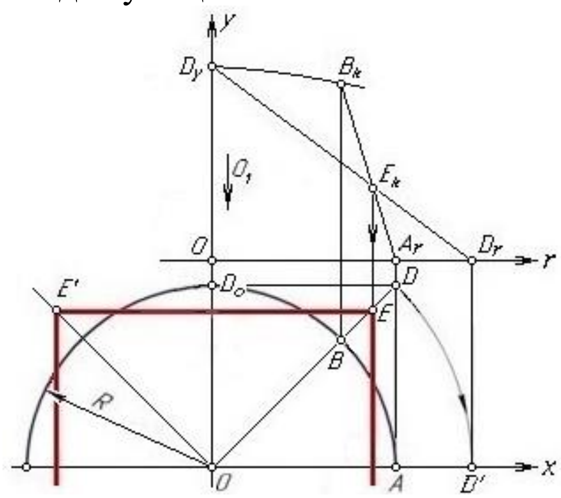

Рис. 6. Квадратура круга (варіант 1)

У системі координат rOy на вісі Oy визначаємо точку D_y ($yD_y=R$, але можна і на довільній висоті). Будуємо дугу кола D_yB_k з центром O_1 на осі Oy (рис. 6). Для цього на осі Oy в системі координат rO_ry визначаємо центр O_1, від'ємна ордината якої дорівнює $5{\cdot}R$. З цього центра радіусом $R_1=O_1D_y$ проводимо дугу D_yB_k.

З точки B проводимо вертикальну пряму до перетину з дугою кола в точці B_k. Дуга D_yB_k, яку використовують у ключах ексцентричних кіл – відображення дуги D_oB [16]. За вертикальною відповідністю з точками D' та A визначаємо координати точок D_r та A_r. O_rD_r – відображення описаного квадрата. Сполучаємо відповідно точки A_r і B_k та D_r і D_y, а на перетині відображень A_rB_k та D_rD_y визначаємо абсцису точки E_k. За вертикальною відповідністю з точкою E_k визначаємо точку E. Абсциса точки E_k – половина шуканої сторони квадрата.

Аналітичний алгоритм 1 квадратури круга.

Вихідні дані: R – радіус круга. Абсциса точки B перетину бісектриси з колом: $xB=\sqrt{R^2 / 2}$. Довжина половини діагоналі описаного квадрата OD: $L_{OD} = \sqrt{2R^2}$. Визначаємо абсцису точки D' поворотом радіуса OD до суміщення з віссю Ox:

$$xD'=L_{OD}.$$

Координати точок D_y, A_r та D_r:

$$rD_y=0,\ yD_y=R,\ rA_r=R,\ yA_r=0,$$
$$rD_r=L_{OD},\ yD_r=0.$$

Ордината центра O_1:

$$yO_1=-5\cdot R-3{,}5\cdot(R/8).$$

Величина радіуса R_1: $R_1=yD_y-yO_1$.

Координати точки B_k:

$$rB_k=xB,\ yB_k=yO_1+\sqrt{R_1^2-rB_k^2}.$$

Абсциса точки E_k:

$$rE_k=(b_2-b_1)/(k_1-k_2),$$

де кутові коефіцієнти відображень A_rB_k та D_rB_y відповідно:

$$k_1=(yA_r-yB_k)/(rA_r-rB_k),$$
$$k_2=(yD_r-yD_y)/(rD_r-rD_y),$$

а вільні перемінні: $b_1=yA_k-k_1\cdot rA_k$, $b_2=yD_r-k_2\cdot rD_r$.

Величина сторони EE' шуканого квадрата: $a=2\cdot rE_k$.

Відносна похибка: $П_в = (a^2-\pi R^2)/\pi R^2 = -0{,}000025$.

Результати розрахунків даних у електронній таблиці Excel наведені в Табл. 2.

Таблиця 2.

Параметризація квадратури круга (варіант 1)

R	xB	L_{OD}	xD′	rD_y	yD_y	rA_r	yA_r	rD_r	yD_r	yO_1	R_1	rB_k	yB_k
50	35,355	70,71	70,71	0	50	50	0	70,71	0	-271,875	321,875	35,355	48,052

k_1	k_2	b_1	b_2	rEk	a	S круга, мм^2	S квадрата, мм^2	Похибка
-3,281	-0,707	164,061	50,0	44,311	88,622	7853,982	7853,786	-0,000025

Величина радіуса R не впливає на результати розрахунків.

Зміна ординати центра O_1 на *1/64* радіуса (yO_1=*-272,66*) призводить до зменшення похибки до 0,000007.

Геометричний алгоритм 2.

Пропонується ще один спосіб квадратури круга з спрощеною формою відображення дуги D_oB (рис. 7).

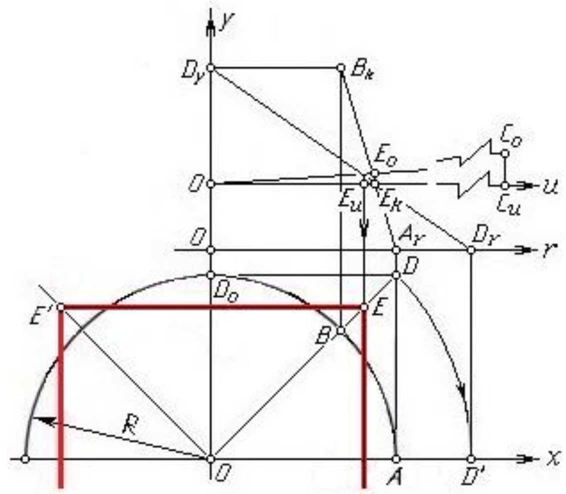

Рис. 7. Квадратура круга (чотирикутний ключ пропорційності)

Визначення координат точок B, D та D' наведено вище.

В системі координат rOy на вісі Oy визначаємо точку D_y та на цій же висоті точку B_k. Відрізок D_yB_k – відображення дуги D_oB.

За вертикальною відповідністю з точками D' та A визначаємо координати точок D_r та A_r. Сполучаємо відповідно точки A_r і B_k та D_r і D_y, а на перетині відображень A_rB_k та D_rB_y визначаємо абсцису точки E_k. Отриману ординату точки E_k перетворюємо способом топологічного перетворення та визначаємо точку E_u.

Аналітичний алгоритм 2 квадратури круга.

Вихідні дані та координати точок B, D і D' та L_{OD} описані вище.

Координати точок A_r, D_r, D_y та B_k:

$$rA_r=R,\ \ yA_r=0,\ \ rD_r=L_{OD},\ \ yD_r=0,$$
$$rD_y=0,\ \ yD_y=R,\ \ rB_k=xB,\ \ yB_k=R.$$

Абсциса точки E_k:

$$rE_k=(b_2-b_1)/(k_1-k_2),$$

де кутові коефіцієнти відображень A_rB_k та D_rD_y відповідно:

$$k_1=(yA_r-yB_k)/(rA_r-rB_k),$$
$$k_2=(yD_r-yD_y)/(rD_r-rD_y),$$

а вільні перемінні:

$$b_1=yA_r-k_1\cdot A_r,\quad b_2=yD_r-k_2\cdot rD_r.$$

Координати точок C_u та C_o:

$$uC_u=5{,}5\cdot R+0{,}5\cdot R/8+0{,}25\cdot R/16,$$
$$yC_o=R/8.$$

Кутовий коефіцієнт ключа пропорційності OC_o: $k_3 = yC_o / uC_u$.

Ордината точки C_o: $yC_o = k_3 \cdot rEk$.

Величина сторони шуканого квадрата:

$$a = 2 \cdot (rE_k - yC_o).$$

Відносна похибка:

$$П_в = (a^2 - \pi R^2) / \pi R^2 = -0,000004.$$

Відсутність останньої складової $0,25 \cdot R/16$ в формулі визначення абсциси uC_u збільшує похибку до *0,00013*.

Результати розрахунків даних у електронній таблиці Excel наведені в Табл. 3. Величина радіуса *R* не впливає на результати розрахунків.

Таблиця 3.

Параметризація квадратури круга (варіант 2).

R	xB	L_{OD}	xD′	rAr	yA_r	rDr	yD_r	rD_y	yD_y
50,0	35,355	70,711	70,711	50,0	0	70,711	0	0	50,0

rB_k	yB_k	k_1	k_2	b_1	b_2	rE_k
35,355	56,25	-3,841	-0,707	192,050	50,0	45,327

uCu	yCo	k_3	yEo	a	S круга, мм^2	S квадрата, мм^2	Похибка
278,906	6,250	0,022	1,016	88,623	7853,982	7853,952	-0,000004

Безсумнівно, самий простий спосіб квадратури круга, як наведено вище, запропонував Архімед за допомогою прямокутного трикутника (див. рис. 1). Все нібито просто, але є одна суттєва проблема – величина периметра круга!

Визначення периметра круга. Геометричний алгоритм 3.

Для вирішення задачі скористаємось ключовими способами перетворення [16].

Розглянемо півкруг *ACB* (рис. 8).

В системі координат *rOy* за вертикальною відповідністю з точкою *A* на осі *Or* визначаємо точку A_r. Ординати B_k та C_k відображень точок *B* і *C* дорівнюють двом діаметрам круга, а ордината відображення точки M_k – дорівнює три чверті діаметра.

Для визначення відображення точки A_k на подовженні лінії AA_r визначаємо точку A'_r, від'ємна ордината якої дорівнює радіусу круга. Через цю точку проводимо горизонтальну лінію, на якій відкладаємо відрізок $A'_rD_r=10{,}25\cdot R$. Катет $D_rD'_r$ дорівнює чверті радіуса. Сполучаємо точки D'_r і A'_r та на перетині з віссю O_ky визначаємо координати центра O_1. Радіусом O_1C_k проводимо дугу до перетину з подовженням лінії A'_rA_r в точці A_k.

На перетині ліній A_kM_k та B_kA_r визначаємо точку F_k, а лінія F_kF_r – чверть периметра круга.

Аналітичний алгоритм 3 визначення периметра круга та квадратури круга

Вихідні дані: R – радіус круга. Абсциса точки A: $xA=R$.

Координати відображень точок:

$$yB_y=2\cdot R,\ rA_k=R,\ rA_r=R,\ rC_k=0,$$
$$yC_k=2\cdot R,\ yA'_r=-R,$$
$$rD_r=-9{,}25\cdot R,\ yD'_r=-1{,}25\cdot R.$$

Кутовий коефіцієнт відрізка $A'_rD'_r$:

$$k=(yD'_r-yA'_r)/(rD_r-xA).$$

Ординати центра O_1 та точки M:

$$yO_1=-k\cdot xA+yA'_r,\ yM=1{,}5\cdot R.$$

Величина радіуса r: $r=yB_y-yO_1$.

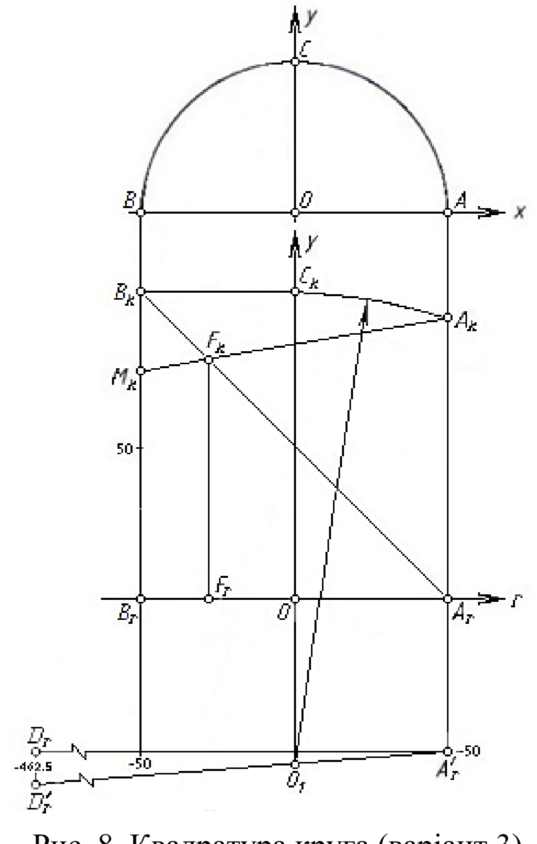

Рис. 8. Квадратура круга (варіант 3)

Координати точки F_k:

$$rF_k=(b_2–b_1)/(k_1–k_2),\ yF_k=k_1\cdot rF_k+yB_y,$$

де кутові коефіцієнти відображень B_yA_r та A_kM_y відповідно:

$k_1 = yB_y/(2R),\ k_2 = (yA_k - yM)/(2R),$

а вільні перемінні: $b_1 = yB_y$, $b_2=yM_k$.

Половина периметра кола $a=2\cdot yF_k$, а площа квадрата $S_{кв.}=a\cdot R$.

Відносна похибка периметра:

$П_в=(L_{кв.}–2\pi R)/(2\pi R)=–0{,}0000003.$

Відносна похибка площі квадрата:

$П_в=(S_{кв.}–\pi R^2)/\pi R^2=–0{,}0000003.$

Результати розрахунків даних у електронній таблиці Excel наведені в Табл. 4.

Таблиця 4.

Параметризація квадратури круга (варіант 3)

R	xA	xB	yB_y	rA_k	rA_r	rC_k	yC_k	yA_r,	rD_r	yD_r	k
50	50	-50	100	50	50	0	100	-50	-462,5	-62,5	0,024

yO_1	yM	r	yA_k	k_1	k_2	b_1	b_2	rF_k	yF_k
-51,220	75	151,220	91,495	-1	0,165	100	75	21,460	78,540

a	L кола, мм	L квадрата,мм	Похибка	S круга, мм^2	S квадрата, мм^2	Похибка
157,0796	314,159	314,1592	-0,0000003	7853,982	7853,979	-0,0000003

Геометричний алгоритм 4 визначення периметра круга та квадратури круга.

Геометричний алгоритм спрощеного способу, але меншої точності полягає в наступному (рис 9).

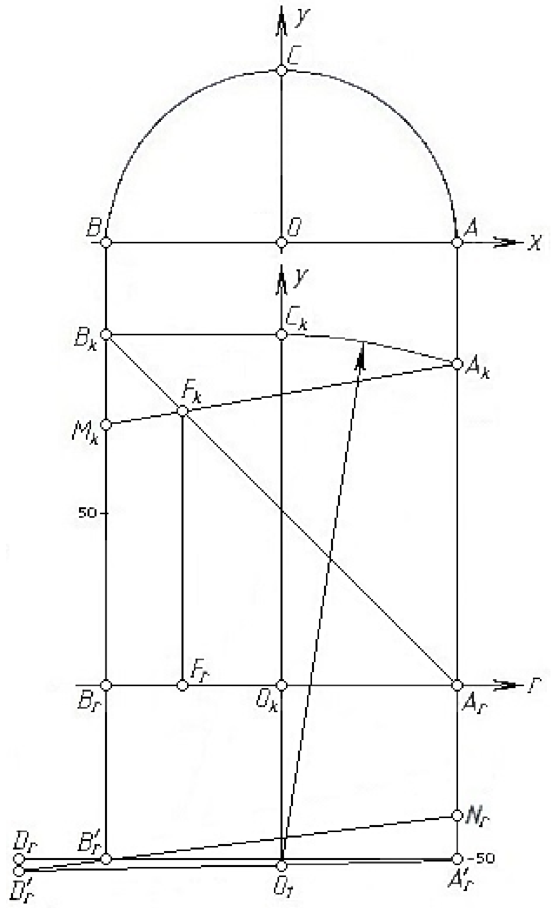

Рис 9 Квадратура круга (варіант 4)

Побудова точки A'_r описана вище. На лінії $A_rA'_r$ відкладаємо відрізок довжиною *0,75R* та визначаємо точку N_r, а на подовжені лінії $A'_rB'_r$ від точки B'_r відкладаємо відрізок B'_rD_r довжиною *0,5R*. Через точку D_r проводимо вертикальну лінію до перетину з подовженням лінії $N_rB'_r$ в точці D'_r. Відрізок $A'_rD'_r$ перетинає вісь O_1y в шуканій точці O_1.

Подальша побудова описана вище.

Аналітичний алгоритм 4 визначення периметра круга та квадратури круга.

Координати відображень окрім описаних вище точок:

$$rN_r = R,\quad yN_r = -0{,}75\cdot R,\quad rD_r = -1{,}5\cdot R.$$

Кутовий коефіцієнт відрізка $N_rB'_r$:

$$k = (yA'_r - yN_r)/(rB_r - rA'_r).$$

Ордината точки D'_r:

$$yD'_r = k\cdot(rD_r - rN_r) + yN_r.$$

Кутовий коефіцієнт відрізка $A'_rD'_r$:

$$k_1 = (yA'_r - yD'_r)/(rA_r - rD_r).$$

Ординати центра O_1:

$$yO_1 = -k\cdot rN_r + yA'_r.$$

Наступні алгоритми описані вище.

Відносна похибка периметра:

$$П_в=(L_{кв.}– 2\pi R)/(2\pi R) = 0,000004\ мм.$$

Відносна похибка площі квадрата:

$$П_в=(S_{кв.}– \pi R^2)/\pi R^2 = 0,000004\ мм^2.$$

Результати розрахунків даних у електронній таблиці Excel наведені в Таблиці 5.

Таблиця 5.

Параметризація квадратури круга (варіант 4).

R	xA	xB	yBk	rAr	rBr	rCk	yCk	yAr′	rNr	yNr	k	rDr	yDr′
50	50	-50	100	50	-50	0	100	-50	50	-37,5	0,125	-75	-53,125

k_1	yO1	yMy	r	yAk	k_2	k_3	b_2	b_3	rFk
0,025	-51,25	75	151,25	91,496	-1	0,165	100	75	21,460

yFk	a	L кола, мм	L квадрата, мм	Похибка	S круга, $мм^2$	S квадрата, $мм^2$	Похибка
78,540	157,080	314,159	314,1606	0,000004	7853,9816	7854,0127	0,000004

Висновки та перспективи. Представлені в статті графічні та аналітичні алгоритми для рішення “знаменитої задачі”: квадратури круга, наочно демонструють можливість побудови квадрата, еквівалентного за площею заданому кругу з високою точністю (мінімальною похибкою), використовуючи лише нерозмічену лінійку та циркуль. Ця еквівалентність чітко підтверджує логіку алгоритмів, яка, як і будь-яка математична формула, гарантує, що необхідна квадратура досяжна, якщо алгоритм виконується з точністю регламентованою стандартом ISO 128-24:1999, IDT, який визначає ширину суцільної тонкої лінії (min) 0,13 мм - похибка графічних побудов, у кінцевому результаті, однозначно залишається в межах ширини лінії.

Алгоритми геометричних побудов базуються на застосуванні ключових способів перетворень, зокрема, чотирикутному ключі пропорційності, який повною мірою розкриває універсальні можливості застосування ключових способів геометричних перетворень та розширює діапазон задач, які можна вирішувати з мінімальною похибкою та лаконічними алгоритмами простих геометричних побудов, застосовуючи саме ключові способи перетворень.

Література

1. *Подпалов Ю.Л.* Побудова чотиригранника з використанням «тільки лінійки». *Вісник Харківського національного університету*. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», 2008. № 833. С. – 222-230.
2. *Манин Ю.И.* О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки. *Энциклопедия элементарной математики*. Книга четвертая. Геометрия. Физматгиз. 1963. С. 209.
3. *Felix Klein.* Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie ausgearbeitet von F. Tägert: eine Festschrift zu der Pfingsten 1895 in Göttingen stattfindenden dritten Versammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts.Teubner, 1895. 66 с.
4. *Генрих Вебер* и *Йозеф Вельштейн*. Энциклопедия элементарной математики. Том I. Перевод с нем. под редакцией и с прим. В. Ф. Кагана. Изд. Матезис. Одесса. 1911 год. 2-е изд. XXIV+666 стр. С. 38.с чертежами.
5. *Адлер А*. Теория геометрических построений: с 179 черт. / Август Адлер, прив.-доц. Высш. технич. школы в Вене пер. с нем. под ред. и с примеч. проф. С. О. Шатуновского. - 2-е изд. Одесса: Mathesis, 1924. XII, 302 с.
6. *Белозеров С.Е.* Пять знаменитых задач древности (История и современная теория. *Изд. Р. университета*, 1975. 320 с.
7. *H. Tietze*, Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit. Vierzehn Vorlesungen für Laien und Freunde der Mathematik. I. Bd.: XX + 256 S. m. 115 Abb. u. 10 Tafeln. II. Bd.: VIII + 297 S. m. 41 Abb. u. 8 Tafeln. München 1959. Verlag C. H. Beck.
8. О квадратуре круга (с приложением истории вопроса, составленной Ф. Рудио) / Архимед, Х. Гюйгенс, А. М. Лежандр, И. Г. Ламберт ; пер. с нем. под ред. С. Н. Бернштейна. 3-е изд. Москва ; Ленинград : ОНТИ. Глав. ред. общетехн. лит. и номографии, 1936. 235 с.
9. *Lambert, Johann Heinrich*. Mémoire sur quelques Propriétés remarquable des Quantités transcendentes circulaires et logarithmiques. (Berlin, Haue et Spener, 1768). 4to. No wrappers as issued in "Mémoires de l'Academie Royale des Sciences et Belles-Lettres", tome XVII, pp. 265-322 and 1 folded engraved plate.
10. *F. Lindemann*. Ueber die Zahl π. Publ. 1 June 1882.Mathematics. Mathematische Annalen. [Електронний ресурс] Режим доступу: https://www.semanticscholar.org/paper/Ueber-die-Zahl-%CF%80.*)-Lindemann/e128c9891c68e627d0480153d017dbabbd9cd4b7.

11. *Танчук М.О.* Поділ плоских кутів на n ≥ 2 рівних частин за допомогою циркуля й лінійки. *XVII Міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука*, 19–20 травня 2016 р., Київ. Матеріали конференції. Том 3. Теорія ймовірностей та математична статистика. Історія та методика математики. С. 317–318.
12. *Танчук Микола*. Розгадка таємниці доведення великої теореми П'єра де Ферма. Трисекція довільних плоских кутів і квадратура круга. Київ : ДЕТУТ, 2016. 32 с.
13. *Lyndon O. Barton*. A Method for the Squaring of a Circle. [Електронний ресурс]. *Advances in Pure Mathematics* Vol.12 No.9, September 27, 2022. Режим доступу: https://www.scirp.org/journal/paperinformation?paperid=120068.
14. *Lyndon O. Barton*. A Procedure for the Squaring of a Circle (of Any Radius) [Електронний ресурс]. *Advances in Pure Mathematics* Vol.13 No.2, February 27, 2023. Режим доступу: https://www.scirp.org/journal/paperinformation?paperid=123312.
15. *L. Wantzel*. Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compass. *Journal de mathématiques pures et appliquées* 1re série, tome 2 (1837), p. 366-372. [Електронний ресурс]. Режим доступу: https://www.numdam.org/item/?id=JMPA_1837_1_2__366_0
16. *Богушко О. А., Малиновський В. І., Святкіна А. Є.* Геометрія поверхонь одягу : підруч. для студ. вищих навчальних закладів. Київ : СПД Кравчук В. К., 2012. 188 с., 145 іл.
17. *Котов И.И.* Геометрические основы ключевых способов построения поверхностей. *Труды ВЗЭИ.* 1957. Вып. 10. С. 15–36.
18. *Котов, И.И.* Новый метод построения поверхностей, удовлетворяющих некоторым наперед заданным требованиям. *Вопросы теории, приложений и методики преподавания начертательной геометрии* (труды Рижской научно-методической конференции, июнь 1957). Рига: Рижский институт инженеров гражданского воздушного флота, 1960. С. 143–161.

References

1. *Podpalov, Yu.L.* (2008). Construction of a tetrahedron using "only a ruler". Herald of Kharkiv National University. Series "Mathematical modeling. Information Technology. Automated control systems", (833), 222-230.
2. *Manin Yu.I.* On the solvability of construction problems using a compass and ruler. *Encyclopedia of Elementary Mathematics*. Book Four: Geometry. Fizmatgiz. 1963. – P. 209.
3. *Klein F.* Lectures on Selected Topics in Elementary Geometry: With an appendix of Wanzel's memoir: Investigation of the means of recognizing whether a geometric problem can be solved with a compass and ruler. Trans.

student N. Parfentyev; Ed. D.M. Sintsov. Phys.-Math. Society, 1898. - 2, 89, 1, IV p.; 25.
4. *Heinrich Weber and Joseph Welshtein*. Encyclopedia of Elementary Mathematics. Volume I. Translation from German, edited and with notes by V. F. Kagan. Mathesis Publishing House. Odessa. 1911. 2nd edition. XXIV+666 pp. With 38 drawings.
5. *Adler, A.* Theory of Geometric Constructions: with 179 figures / August Adler, Associate Professor of the Higher Technical School in Vienna, translated from German, edited and with notes by Professor S. O. Shatunovsky. 2nd ed. Odessa: Mathesis, 1924. XII, 302 p.
6. *Belozerov, S. E.* Five Famous Problems of Antiquity (History and Modern Theory) / S. E. Belozerov. Publ. R. University, 1975. 320 p.
7. *H. Tietze*, Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit. Vierzehn Vorlesungen für Laien und Freunde der Mathematik. I. Bd.: XX + 256 S. m. 115 Abb. u. 10 Tafeln. II. Bd.: VIII + 297 S. m. 41 Abb. u. 8 Tafeln. München 1959. Verlag C. H. Beck.
8. Archimedes, Huygens, H., Legendre, A. M., & Lambert, J. H. (1936). *O kvadrature kruha (s prilozhenyem istoryy voprosa, sostavlennoi F. Rudio) [On squaring the circle (with an appendix on the history of the question compiled by F. Rudio)]* (3rd ed., S. N. Bernstein, Ed.). ONTI. {in Russian}
9. *Lambert, Johann Heinrich.* Memoir on some remarkable properties of circular and logarithmic transcendental quantities. (Berlin, Haue and Spener, 1768). 4to. No wrappers as issued in "Mémoires de l'Academie Royale des Sciences et Belles-Lettres", volume XVII, pp. 265-322 and 1 folded engraved plate.
10. *F. Lindemann*. On the number π. Publ. 1 June 1882. Mathematics. Mathematische Annalen. [Electronic resource]. Access mode: https://www.semanticscholar.org/paper/Ueber-die-Zahl-%CF%80.*)-Lindemann/e128c9891c68e627d0480153d017dbabbd9cd4b7.
11. *Tanchuk, M. O.* (2016). Dividing plane angles into n ≥ 2 equal parts using a compass and a ruler. Probability theory and mathematical statistics. *History and methodology of mathematics*. (T3, p. 317-318), Kyiv.
12. *Mykola Tanchuk.* (2016). Solving the secret of the proof of Pierre de Fermat's great theorem. Trisection of arbitrary plane angles and quadrature of a circle. Kyiv: DETUT.
13. *Lyndon O. Barton*. A Method for the Squaring of a Circle. *Advances in Pure Mathematics*. Vol.12 (9), URL: https://www.scirp.org/journal/paperinformation?paperid=120068
14. *Lyndon O. Barton.* A Procedure for the Squaring of a Circle (of Any Radius). *Advances in Pure Mathematics* Vol.13 (2), URL: https://www.scirp.org/journal/paperinformation?paperid=123312.
15. *L. Wantzel*. Research on the means of recognizing if a Geometry Problem can be solved with the ruler and compass / *Journal of pure and applied mathematics 1st series*. Volume 2 (1837), p. 366-372. [Electronic resource]. Access mode: https://www.numdam.org/item/?id=JMPA_1837_1_2__366_0

16. *Bogushko, O.A., Malynovskyi, V.I., & Sviatkina, A.E.* (2012). Geometry of clothing surfaces. Kyiv: SPD Kravchuk, V.K.
17. *Kotov I.I.* Geometrical foundations of key methods for constructing surfaces. Proceedings of VZEI. 1957. Issue 10. P. 15–36.
18. *Kotov, I.I.* A new method for constructing surfaces satisfying certain pre-specified requirements. *Questions of theory, applications and methods of teaching descriptive geometry* (Proceedings of the Riga Scientific and Methodological Conference, June 1957). Riga: Riga Institute of Civil Air Fleet Engineers, 1960. P. 143–161.

Ph.D., prof. **Bogushko O.A.[1],**
oleksandr.bogushko@gmail.com,
Ph.D., prof. **Malynovskyi V.I.[2],**
valerii_malynovskyi@lnam.edu.ua, ORCID: 0000-0002-9084-9248

[1]Kyiv National University of Technologies and Design, Ukraine
[2]Kosiv State Institute of Decorative Arts

FAMOUS ANCIENT PROBLEMS. QUESTIONS OF THE SOLVABILITY OF CONSTRUCTION PROBLEMS USING A COMPASS AND A RULER

The paper examines and analyzes the historical aspect of the formulation and development of the problem of solving well-known problems of antiquity: quadrature of a circle (circulation of a square), doubling of a cube, trisection of an angle, and division of a circle into equal parts (construction of regular polygons). The complexity of the problem was laid in the very initial condition: to solve the problem exclusively with the help of a compass and a ruler without strokes that are multiples of the length unit. In the classical sense, the term "construction using only a ruler" means that the ruler is used exclusively for drawing straight lines and it has no units of measurement. The essence of solving the main problem of the theory of constructions with a compass and a ruler consists in the exact description of graphic constructions that can be performed and in the description of the algorithm that makes it possible to solve any specific problem or find out that this problem is unsolvable. The article examines the conditions of these well-known problems and methods of solving them from ancient times to the present. So, the first task: quadrature of a circle, the essence of which is to find an algorithm for constructing a square with the help of a compass and a ruler, equal in area to the area of the given circle. Its inverse problem 2: circumscribing a square – building a circle whose area would be equal to the area of a given square and problem 3: doubling a cube – building a cube with twice the volume of the original cube. Based on the analysis of existing methods and algorithms for solving the above-mentioned problems, effective geometric algorithms of graphic constructions, purely with a *circle and a ruler, are proposed, which are accompanied by analytical calculations of possible errors of geometric constructions. The solution of these problems is based on the application of key methods of geometric transformations, in particular, the quadrilateral key of proportionality, which fully reveals the universal possibilities of applying key methods of geometric transformations and expands the range of problems that can be solved with minimal error and concise constructions by applying these key methods of transformations.*

Keywords: Key transformations, quadrilateral key of proportionality, squaring a circle, compasses, ruler, graphic algorithm, error of geometric constructions.

Продовження (закінчення) буде.