

к. ф-м. н. доцент **Наголкіна З.І.**

zonagol@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2722-5176

к. ф-м.н. доцент **Філонов Ю.П.,**

yuri@fil.in.ua, ORCID: 0000-0002-1100-4854

к.ф-м.н. доцент **Соколова Л.В**

ludvitso@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1596-4932

Київський національний університет будівництва і архітектури

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

У роботі розглядається стохастичне диференціальне рівняння з частинними похідними. Визначаються умови, при яких задача Коші має єдиний розв'язок. Такого типу рівняння є математичними моделями для процесів, скажімо, теплопровідності і дифузії, які протікають в випадково неоднорідному середовищі, або при наявності зовнішніх випадкових флуктуацій, що впливають на процес. Розглядається стохастична модель у формі рівняння Іто. Незбурена частина є рівняння в частинних похідних в операторному вигляді. Знесення в рівнянні складається з двох частин -необмеженого замкненого оператора $A(t)$, який є диференціальним оператором і обмеженої функції, що задовольняє стандартним умовам. Рівняння такого типу виходить за рамки класичної теорії диференціальних рівнянь. Тому розв'язок виражається через еволюційний оператор $U(t, t_0)$ і інтегральну частину, що враховує випадкове збурення, як неоднорідність. При цьому $U(t, t_0)\varphi$ є сильно неперервний еволюційний оператор, що породжується задачею Коші для незбуреного рівняння. Існування розв'язку такого операторно-стохастичного рівняння досліджується методом, який є ймовірнісним аналогом метода, відомого в теорії еволюційних рівнянь як метод мультиплікативних представлень Далецького-Троттера: $\eta(t) = P - \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n S(t_{k+1}, t_k) \circ U(t_{k+1}, t_k) \varphi$. $S(t, \tau)$ – сильно неперервний стохастичний оператор, що породжується розв'язком стохастичним рівнянням, що описує випадкове збурення в формі Іто. Це дає змогу дослідити новий клас стохастичних рівнянь, а також клас сильних операторних стохастичних сімей в гільбертовому просторі. Це можливо при виконанні певних додаткових умов на еволюційний оператор $U(t, t_0)$, що породжувався замкненим необмеженим оператором. Ці умови були сформульовані в термінах властивостей відповідної резольвенти необмеженого оператора знесення. Розв'язок розглядається, як границя мультиплікативного представлення еволюційних сімей операторів

відповідно для детермінованої і випадкової частини. Визначаються умови, при яких це мультиплікативне представлення буде єдиним розв'язком стохастичного диференціального рівняння $d\eta_\varphi(t) = A(t)\eta_\varphi(t)dt + a(t, \eta_\varphi(t))dt + dB(t, \eta_\varphi, w)$. Постановка цієї задачі стала можливою при використанні апарату напівгруп. Для доведення існування єдиного розв'язку було застосовано стохастичний аналог метода Хольмгрена, відомого в теорії напівгруп.

Ключові слова: стохастичне диференціальне рівняння, необмежений оператор; замкнений оператор, область визначення оператора; гільбертів простір; банахів простір; повний простір; потік σ – алгебр; рівняння теплопровідності; мультиплікативне представлення; нерівність Чебишева; лема Хольмгрена; лема Гронуола; задача Коші; єдиність розв'язку; еволюційний оператор.

Постановка проблеми. Стохастичне рівняння в частинних похідних виникає при моделюванні процесів теплопровідності [1] і дифузії [2] в разі наявності додаткових випадкових флуктуацій, які виникають, в тому числі, і внаслідок непрогнозованих зовнішніх факторів. Постановка детермінованої задачі в операторному вигляді в функціональному просторі є диференціальне рівняння з необмеженим оператором [3]. В рамках теорії напівгруп, розв'язок такого рівняння можна представити через еволюційну сім'ю розрішаючих операторів. При наявності випадкового збурення цього рівняння розглядають стохастичне диференціальне рівняння в формі Іто з необмеженим оператором знесення [4]. При цьому випадкове збурення в певній постановці задачі може відігравати роль неоднорідності. Розв'язок такого рівняння отримано методом мультиплікативних представлень і він має вигляд композиції розрішаючих операторів детермінованої і випадкової частин на елементарних проміжках часу. У цьому полягає стохастичний варіант метода Далецького-Троттера для даного типу рівнянь [5]. Проблема полягає в доведенні існування єдиного розв'язку задачі Коші саме операторно-диференціального стохастичного рівняння в гільбертовому просторі.

Ціль статті. У статті досліджуються умови існування єдиного розв'язку задачі Коші для стохастичного операторно-диференціального рівняння в формі Іто з лінійним необмеженим оператором знесення в функціональному гільбертовому просторі.

Аналіз основних досліджень.

Теорія операторних диференціальних рівнянь в банаховому просторі була розвинена в [3]. Випадкове збурення операторного диференціального рівняння в гільбертовому просторі, яке описується стохастичним диференціальним рівнянням з необмеженим оператором знесення розглянуто в [6]. Там же розглядалось рівняння для еволюційних сімей

розрешаючих операторів, в якому випадкова частина відігравала роль неоднорідності. Розв'язок такого рівняння було отримано в [4] методом, який є стохастичним аналогом метода мультиплікативних представлень Далецького-Троттера [7],[8] Великий клас стохастичних рівнянь було досліджено в [9],[10] за допомогою ймовірнісного аналога метода монотонних відображень. У роботі [11] методом мультиплікативних представлень досліджено стохастичне диференціальне рівняння в формі Іто з нелінійним коефіцієнтом знесення достатньо загального вигляду. У цій же статті були досліджені умови існування єдиного розв'язку задачі Коші для цього рівняння. Це було зроблено за допомогою стохастичного аналога метода Хольмгрена [12] теорії напівгруп. У даній роботі методи, які висвітлені в [11] застосовуються для дослідження існування єдиного розв'язку задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння в формі Іто з необмеженим лінійним оператором знесення в гільбертовому просторі.

Основна частина. Нехай (Ω, F, P) – ймовірнісний простір, H – дійсний сепарабельний гільбертів простір, $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ – гільбертів простір випадкових величин зі значеннями в H і скінченими моментами другого порядку. Рівняння в частинних похідних з випадковим збуренням в просторі H має вигляді

$$d\eta(t) = A(t)\eta(t)dt + a(t, \eta(t))dt + b(t, \eta(t))dw(t) \quad (1)$$

де $A(t)$ – лінійний необмежений оператор. Це стохастичне рівняння з необмеженим оператором знесення виходить за рамки класичної теорії [13] стохастичних диференціальних рівнянь в формі Іто. Нехай виконуються умови, при яких можливо розглядати інтегрально- операторну модифікацію цього рівняння вигляду:

$$\eta(t) = U(t, t_0)\eta_0 + \int_{t_0}^t U(s, t_0)a(s, \eta(s))ds + \int_{t_0}^t U(s, t_0)b(s, \eta(s))dw(s) \quad (2)$$

Це дає змогу уникнути умови необмеженості оператора знесення. На відміну від стохастичного рівняння в [11], де не є можливим представити його в аналогічній формі. Коефіцієнти $a(s, x)$, $b(s, x)$ задовольняють умовам, при яких існує єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язок класичного диференціального стохастичного рівняння

$$d\eta(t) = a(t, \eta(t))dt + b(t, \eta(t))dw(t) \quad (3)$$

коли $A(t) \equiv 0$. $U(t, \tau)$ - двопараметрична сильно неперервна по $(t, \tau) \in [t_0, T]$ еволюційна сім'я лінійних обмежених операторів, твірний оператор якого $A(t)$ при кожному $t \in [t_0, T]$ є лінійним необмеженим оператором з щільно вкладеною в H областю визначення D_A , що не залежить від t . Згідно з теорією еволюційних рівнянь в банаховому просторі [14] [3] при

виконанні ряду вимог на спектр оператора $A(t)$ еволюційна сім'я є квазістисною, тобто має оцінку

$$\|U(t, \tau)x\| \leq e^{c(t-\tau)}\|x\| \quad (4)$$

Задача Коші для диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y(t), \quad y(t_0) \in D_A \quad (5)$$

і відповідно її розв'язок визначається за формулою $y(t) = U(t, t_0)y_0$.

Хоча оператор $A(t)$ визначається на $D_A \subset H$, проте в силу сильної неперервності $U(t, t_0)$ цей розв'язок можна подовжити на весь простір H і в ньому розглядати стохастичне рівняння вигляду (2). Щоб в подальшому врахувати замкненість оператора $A(t)$, розглянемо шкалу гільбертових просторів $H = H_0, H_1 = D_A, H_1 \subset H_0$. Сформулюємо умови [13], [15] існування класичного розв'язку стохастичного диференціального рівняння Іто (3) для даного конкретного випадку: будемо вважати, що коефіцієнти $a(t, x) \in H, b(t, x) \in \wp_2(H)$ функції, вимірні по сукупності змінних і $t \in [t_0, T], x \in H$ і задовольняють умовам:

$$\|a(t, x)\|^2 + \sigma_2^2(b(t, x))\|^2 \leq k_1\|x\|^2 + k_2 \quad (6)$$

$$\|a(t, x) - a(t, y)\|^2 + \sigma_2^2(b(t, x) - b(t, y)) \leq k_3\|x - y\|^2, \quad (7)$$

де k_1, k_2, k_3 довільні сталі, $\wp_2(H)$ – простір операторів Гільберта-Шмідта в H , норма операторів Гільберта-Шмідта $\sigma_2^2(b) = \sum_{j=1}^{\infty} \|be_j\|^2$, де $\{e_j\}_1^{\infty}$ – ортонормований базис в просторі H .

Теорема. Нехай функції $a(t, x), b(t, x)$ задовольняють умовам (6), (7). А еволюційна сім'я $U(t, t_0)$ має оцінку (4), тоді існує єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язок рівняння (2), який допускає мультиплікативне представлення Далецького -Троттера вигляду:

$$\eta(t) = P - \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n S(t_{k+1}, t_k) \circ U(t_{k+1}, t_k) \varphi \quad (8)$$

Ця теорема була доведена в [4]. Там же було показано справедливості оцінок для еволюційних сімей операторів $S(t_{k+1}, t_k)$ і $U(t_{k+1}, t_k)$. Оператор $S : \eta(t) = S(t, t_k) \circ \eta(t_k)$ визначається класичним стохастичним рівнянням (3). Оператор U рівнянням (5) : $y(t) = U(t, t_k)y(t_k)$. Відрізок $[t_{k+1}, t_k]$ є стандартне розбиття точками $t_0, t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_n$ відрізка $[t_0, T]$. Еволюційні оператори $S(t_{k+1}, t_k)$ і $U(t_{k+1}, t_k)$ називають також розрешаючими операторами відповідних рівнянь на відріжку $[t_{k+1}, t_k]$.

Розрешаючим оператором рівняння (2) є еволюційна стохастична сім'я операторів вигляду $V(t, t_0, \eta_0) = V(t, t_0) \circ \eta_0 = \eta(t)$. При цьому, згідно з основним принципом метода мультиплікативних представлень, який базується на властивості еволюційності, має місце:

$$\begin{aligned}\eta(t) &= P - \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n V(t_{t_{k+1}}, t_{t_k}) \circ \varphi = \\ &= P - \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n S(t_{k+1}, t_k) \circ U(t_{k+1}, t_k) \varphi\end{aligned}\quad (9)$$

При цьому розрішаючий оператор $V(t, t_0, \eta_0)$ породжується задачею Коші для рівняння (2) і має вигляд

$$\begin{aligned}V(t, t_0, \eta_0) &= U(t, t_0) \eta_0 + \int_{t_0}^t U(s, t_0) a(s, V(s, t_0, \eta_0)) ds + \\ &+ \int_{t_0}^t U(s, t_0) b(s, V(s, t_0, \eta_0)) dw(s),\end{aligned}\quad (10)$$

де $\eta_0 \in H = H_0$.

З іншого боку, якщо початкова функція $\varphi \in H_1 = D_A$, то :

$$\begin{aligned}V(t, t_0, \varphi) &= \varphi + \int_{t_0}^t A(s) V(t, s) \circ \eta_\varphi(s) ds + \int_{t_0}^t a(s, V(t, s) \circ \eta_\varphi(s)) ds \\ &+ \int_{t_0}^t b(s) (V(t, s) \circ \eta_\varphi(s), dw(s))\end{aligned}$$

З властивостей коефіцієнтів стохастичного рівняння, а також еволюційного оператора $U(t, t_0)$ впливають наступні властивості еволюційної [10] сім'ї $V(t, \tau, \eta_\tau): V(t, \tau): \mathcal{H}_\tau \rightarrow \mathcal{H}_t$

$$E_\tau \|V(t, \tau) \circ x\|^2 \leq e^{\beta_1(t-\tau)} \|x\|^2 + \beta_2(t-\tau) \quad (11)$$

$$E_\tau \|V(t, \tau) \circ x - V(t, \tau) \circ y\|^2 \leq e^{\beta_3(t-\tau)} \|x - y\|^2 \quad (12)$$

$$E_\tau \|V(t, \tau) \circ x - x\|_1^2 \leq \beta_4(t-\tau) \quad (13)$$

Де $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ – довільні сталі пов'язані з $c, k_1, k_2, k_3, \|x\|$, а β_4 ще і з $\|x\|_1$.

Слід зазначити, що згідно з класичною теорією випадкових процесів визначається потік розширюваних F_t сігма-підалгебр, сігма-алгебри $F: F_t \subset F$ узгоджений з вінеровським процесом $w(t)$. Позначимо $\mathcal{H}_t \subset \mathcal{H}$ сукупність елементів $L_2(\Omega)$, які є F_t вимірними випадковими величинами. Стохастичні еволюційні оператори $S(t, \tau), V(t, \tau)$ визначають відображення з простору \mathcal{H}_τ випадкових величин в простір \mathcal{H}_t ($t > \tau$). Тобто: $V(t, \tau): \mathcal{H}_\tau \rightarrow \mathcal{H}_t, S(t, \tau): \mathcal{H}_\tau \rightarrow \mathcal{H}_t$.

Для зручності подальшого використання, позначимо $\eta_0 = \varphi$. В роботах [4], [16] було отримано єдиний розв'язок з точністю до стохастичної еквівалентності рівняння (2). Метою даної роботи є визначення умов, при яких випадковий процес $\eta(t)$ вигляду (8), або (10) буде єдиним розв'язком інтегрального рівняння в формі Іто :

$$\eta_\varphi(t) = \varphi + \int_{t_0}^t A(s) \eta_\varphi(s) ds + \int_{t_0}^t a(s, \eta_\varphi(s)) ds + \int_{t_0}^t b(s)(\eta_\varphi(s), dw(s)) \quad (14)$$

Особливість цього дослідження полягає в тому, що $A(s)$ є замкненим необмеженим оператором і відповідний інтеграл існує при певному виборі початкової умови для задачі Коші. Покажемо, що процес вигляду (10) є єдиним розв'язком рівняння (14). При цьому єдиність буде показана за допомогою стохастичного аналогу відомого в теорії напівгруп метода Хольмгрена, аналогічно [11] а для доведення того, що процес $\eta(t)$ (10) або (8) задовольняє рівнянню (14), буде досліджено допоміжний процес:

$$\mu(t) = \eta(t) - \varphi - \int_{t_0}^t A(s)\eta(s) ds - \int_{t_0}^t a(s, \eta(s)) ds - \int_{t_0}^t b(s)(\eta(s), dw(s)) \quad (15)$$

І показано, що $\mu(t) = 0$ з ймовірністю 1.

Теорема 1. Про існування єдиного розв'язку задачі Коші.

Нехай виконуються умови, при яких процес $\eta(t)$ допускає представлення (8) і відповідно (10), а початкова умова $\varphi \in D_A$. Тоді, якщо процес $\eta_\varphi(t)$ задовольняє рівнянню (14) то він є єдиним з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язком рівняння (14).

Доведення. В силу властивості еволюційності розрешаючого оператора будемо розглядати $V(s, t)$ ($s > t$). Вважатимемо, що рівняння (10) має два сильних розв'язки один $\eta_\varphi(t) = V(t, t_0)^\circ \varphi$ і другий $\xi_\varphi(t)$, що формально задовольняє рівнянню (14). Позначимо $K_t^\circ \varphi$ допоміжну функцію вигляду

$$K_t^\circ \varphi = V(s, t)^\circ \xi_\varphi(t) \quad (16)$$

Покажемо, що з ймовірність 1 вона не залежить від t . Це свідчить про те, що еволюція визначається тільки оператором $V(s, t)$ і не важливо, яке значення було в момент t . Згідно з теоремою Чебишева

$$P[\|K_t^\circ \varphi - K_\tau^\circ \varphi\| > \varepsilon] \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\|K_t^\circ \varphi - K_\tau^\circ \varphi\|^2 \quad (17)$$

Позначимо $L_{2k}(\Omega, F, P)$ банахів простір випадкових величин зі значеннями в H_k . Під H_k розуміють шкалу гільбертових просторів, послідовно щільно вкладених. В даному випадку маємо $H = H_0$, $H_1 = D_A$, $D_A = H_1 \subset H_0 = H$. Норма в $\mathcal{H} = L_{2k}(\Omega, F, P)$ визначається $\|x\|_k = \{E\|x(\omega)\|_k^2\}^{1/2}$.

Розглянемо $\Delta = E\|K_t^\circ \varphi - K_\tau^\circ \varphi\|^2$. Розіб'ємо інтервал $[\tau, t]$ точками $\tau \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq t_{k+1} \dots \leq t$. Тоді, згідно з нерівністю трикутника в просторі $\mathcal{H} = L_2(\Omega, F, P)$ ($E\|\xi\|^2 < \infty$) маємо таку нерівність:

$$\Delta^{1/2} = \{E\|K_t \circ \varphi - K_t \circ \varphi\|^2\}^{1/2} = \left\{E\left\|\sum_{i=0}^n K_{t_{i+1}} \circ \varphi - K_{t_i} \circ \varphi\right\|^2\right\}^{1/2} \leq \sum_{i=0}^n \left\{E\|K_{t_{i+1}} \circ \varphi - K_{t_i} \circ \varphi\|^2\right\}^{1/2}$$

Розглянемо

$$\begin{aligned} E\|K_{t_{i+1}} \circ \varphi - K_{t_i} \circ \varphi\|^2 &= EE_{t_i}\|V(s, t_{i+1}) \circ \xi_\varphi(t_{i+1}) - V(s, t_i) \circ \xi_\varphi(t_i)\|^2 = \\ &= E_{t_i}\|V(s, t_{i+1}) \circ \xi_\varphi(t_{i+1}) - V(s, t_{i+1}) \circ V(t_{i+1}, t_i) \xi_\varphi(t_i)\|^2 \\ &\leq e^{\beta_1(s-t_i)} E_{t_i}\|\xi_\varphi(t_{i+1}) - V(t_{i+1}, t_i) \circ \xi_\varphi(t_i)\|^2 \\ E_{t_i}\|\xi_\varphi(t_{i+1}) - V(t_{i+1}, t_i) \circ \xi_\varphi(t_i)\|^2 &= E_{t_i}\left\|\int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s) \xi_\varphi(s) ds + \right. \\ &\left. \int_{t_i}^{t_{i+1}} a(s, \xi_\varphi(s)) ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (b(s), \xi_\varphi(s)) dw(s) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s) V(s, t_i) \xi_\varphi(t_i) ds - \right. \\ &\left. \int_{t_i}^{t_{i+1}} a(s, V(s, t_i) \xi_\varphi(t_i)) ds - \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(s, (V(s, t_i) \xi_\varphi(t_i)) dw(s)\right\|^2 = \\ E_{t_i}\left\|\int_{t_i}^{t_{i+1}} (A(s) (\xi_\varphi(s) - V(s, t_i) \xi_\varphi(t_i))) ds \right. \\ &+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} (a(s, \xi_\varphi(s)) - a(s, V(s, t_i) \xi_\varphi(t_i))) ds \\ &\left. + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (b(s, \xi_\varphi(s)) - b(s, V(s, t_i) \xi_\varphi(t_i))) dw(s)\right\|^2 \end{aligned}$$

E_{t_i} умовне математичне сподівання відносно відповідної F_{t_i} .

Враховуючи властивості коефіцієнтів рівняння, а також властивості еволюційного оператора $V(s, t_i)$ для оцінки $\theta(t_{i+1})$ введемо позначення і, скориставшись нерівністю Коші для норм:

$$\theta(t_{i+1}) = E_{t_i}\|\xi_\varphi(t_{i+1}) - V(t_{i+1}, t_i) \xi_\varphi(t_i)\|^2 \leq 3(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (18)$$

Де

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E_{t_i}\left\|\int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s) (\xi_\varphi(s) - V(s, t_i) \xi_\varphi(t_i)) ds\right\|^2 \\ \sigma_2 &= E_{t_i}\left\|\int_{t_i}^{t_{i+1}} (a(s, \xi_\varphi(s)) - a(s, V(s, t_i) \xi_\varphi(t_i))) ds\right\|^2 \\ \sigma_3 &= E_{t_i}\left\|\int_{t_i}^{t_{i+1}} (b(s, \xi_\varphi(s)) - b(s, V(s, t_i) \xi_\varphi(t_i))) dw(s)\right\|^2 \end{aligned}$$

Позначимо область визначення $D_A = H_1$ необмеженого оператор $A(s)$, щільно вкладену в простір $H_1 \subseteq H$. Оскільки $\varphi \in H_1$, то і

$\xi_\varphi(s) \in H_1$. Відповідно позначимо норму в цьому просторі $\|\cdot\|_1$. Відповідно оцінки $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &\leq \Delta_i(t) \int_{t_i}^{t_{i+1}} c E_{t_i} \|\xi_\varphi(s) - V(s, t_i) \xi_\varphi(t_i)\|_1^2 ds \\ \sigma_2 &\leq \Delta_i(t) \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_3 E_{t_i} \|\xi_\varphi(s) - V(s, t_i) \xi_\varphi(t_i)\|_1^2 ds \\ \sigma_3 &\leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_3 E_{t_i} \|\xi_\varphi(s) - V(s, t_i) \xi_\varphi(t_i)\|_1^2 ds\end{aligned}$$

Оцінка σ_1 . На області визначення H_1 оператор $A(s)$ є лінійний обмежений. Оцінки σ_2 і σ_3 враховують ліпшицевість відповідних коефіцієнтів рівняння. В силу сильної неперервності оператора $V(s, t_i)$ на області визначення, що враховано в (18):

$$\begin{aligned}E_{t_i} \|\xi_\varphi(s) - V(s, t_i) \xi_\varphi(t_i)\|_1^2 &\leq 2E_{t_i} \|\xi_\varphi(s) - \xi_\varphi(t_i)\|_1^2 + \\ 2\|\xi_\varphi(t_i) - V(s, t_i) \xi_\varphi(t_i)\|_1^2 &\leq c(\|\varphi\|_1)(s - t_i).\end{aligned}$$

Звідки випливає, що

$$\sigma_1 + \sigma_2 \leq \Delta_i(t) \int_{t_i}^{t_{i+1}} C(\|\varphi\|_1, c, k_3)(s - t_i) ds \leq C(\Delta_i(t))^3 \quad (19)$$

В силу леми Гронуола для визначення (19), враховуючи (18) маємо нерівність

$$\theta(t_{i+1}) \leq C(\Delta_i(t))^3 + \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_3 \theta(s) ds$$

Звідки випливає оцінка $\theta(t_{i+1}) \leq C(\Delta_i(t))^3$, де стала C залежить від $\|\varphi\|_1$ і оцінок, яким задовольняють коефіцієнти стохастичного рівняння. Таким чином

$$\Delta^{1/2} = \sum_{i=0}^n \Delta(t_{i+1})^{3/2} \leq C \rho(\Delta_i(t)) \rightarrow 0, \text{ коли } \Delta_i(t) \rightarrow 0.$$

Це і доводить, що функція $K_t \circ \varphi = V(s, t) \circ \xi_\varphi(t)$ не залежить від t з ймовірністю 1. Тобто

$$V(s, t_o) \varphi = V(s, t) \circ \xi_\varphi(t) \quad (20)$$

Враховуючи сильну неперервність відображення $V(s, t)$ по s майже всюди, маємо рівність $\xi_\varphi(t) = V(t, t_o) \varphi$ з ймовірністю 1. (Це означає, що в формулі (20) замість s слід підставити t). Тобто $\xi_\varphi(t)$ майже скрізь є єдиним розв'язком при умові, що початкова функція належить області визначення необмеженого оператора знесення. Подовження розрешаючого оператора в силу повноти на весь простір аналітично відповідає рівнянню (2), що буде доведено в наступній теоремі

Теорема 2. Нехай виконані умови, при яких $\eta_\varphi(t)$ є єдиним розв'язком рівняння (14), тоді він задовольняє (8) з ймовірністю 1.

Доведення. Для доведення цієї теореми покажемо, що для $\mu(t)$ вигляду (15)

$$P[\|\mu(t)\| > \varepsilon] \rightarrow 0$$

Для будь якого $\varepsilon > 0$.

Згідно з нерівністю Чебишева

$$P[\|\mu(t)\| > \varepsilon] \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\|\mu(t)\|^2$$

$$\mu(t) = \eta(t) - \varphi - \int_{t_0}^t A(s)\eta(s) ds - \int_{t_0}^t a(s, \eta(s)) ds$$

$$- \int_{t_0}^t b(s)(\eta(s), dw(s))$$

$$\Delta = E\|\mu(t)\|^2 \quad (21)$$

Розіб'єм відрізок $[t_0, t]$ точками $(i = \overline{0, n})$: t_0, t_1, \dots, t_{n+1} . Треба оцінити, аналогічно попередньому, користуючись нерівністю трикутника для норм:

Для зручності ввели позначення: $\mu(t) = \mu(t_1) - \mu(t_0) + \mu(t_2) - \mu(t_1) + \dots$

$$+ \mu(t_{n+1}) - \mu(t_n) = \sum_{i=0}^n \theta_i = \mu(t_{n+1}) - \mu(t_0) = \mu(t) - 0$$

$$\Delta = E \left\| \sum_{i=0}^n \theta_i \right\|^2 \leq \sum_{i=0}^n \{E_i \|\theta_i\|^2\}^{1/2}$$

Де

$$\theta_i = \eta(t_{i+1}) - \eta(t_i) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s)\eta(s) ds - \int_{t_i}^{t_{i+1}} a(s, \eta(s)) ds$$

$$- \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(s, \eta(s)) dw(s) = \theta_{i1} + \theta_{i2} + \theta_{i3} + \theta_{i4}$$

$$E\|\theta_{i1} + \theta_{i2} + \theta_{i3} + \theta_{i4}\|^2 \leq 4 \sum_{k=0}^4 E\|\theta_{ik}\|^2$$

Визначимо θ_{ik} . Як доведено в попередній теоремі єдиним розв'язком, що задовольняє (14) і розглядається у (15) є $\eta(t) = V(t, t_0)\varphi$. З врахуванням цього зробимо тотожні перетворення (15) на відріжку $[t_{i+1}, t_i]$:

$$\theta_{i1} = \eta(t_{i+1}) - S(t_{i+1}, t_i) \circ U(t_{i+1}, t_i) \eta(t_i) =$$

$$V(t_{i+1}, t_i) \eta(t_i) - S(t_{i+1}, t_i) \circ U(t_{i+1}, t_i) \eta(t_i).$$

$$S(t_{i+1}, t_i) \circ U(t_{i+1}, t_i) \eta(t_i) = \eta(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s) U(s, t_i) \eta(t_i) ds +$$

$$+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} a(s, S(s, t_i)) \circ U(t_{i+1}, t_i) \eta(t_i) ds +$$

$$+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} b(s, S(s, t_i)) \circ U(t_{i+1}, t_i) \eta(t_i) dw(s).$$

Слід відмітити, що таке представлення можливе тільки в тому випадку, коли початкове значення знаходиться в області визначення оператора A .

$$E_i \|\theta_{i1}\|^2 = E_i \|S(t_{i+1}, t_i) \circ U(t_{i+1}, t_i) \eta(t_i) - V(t_{i+1}, t_i) \circ \eta(t_i)\|^2 \leq C_1 (\Delta_i(t))^3$$

$$E_i \|\theta_{i1}\|^2 \leq C_1 (\Delta_i(t))^3$$

$$\begin{aligned}\theta_{i2} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} (a(s, S(s, t_i)) \circ U(t_{i+1}, t_i) \eta(t_i) - a(s, \eta(s))) ds \\ \theta_{i3} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} (b(s, S(s, t_i)) \circ U(t_{i+1}, t_i) \eta(t_i) - b(s, \eta(s))) dw(s) \\ \theta_{i4} &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} (A(s) U(s, t_i) \eta(t_i) - A(s) \eta(s)) ds\end{aligned}$$

Користуючись, умовою Ліпшица (5) на коефіцієнти стохастичного рівняння $a(s, x)$ і $b(s, x)$, а також сильною неперервністю оператора $U(s, t_i)$ отримуємо наступні оцінки:

$$\begin{aligned}E_i \|\theta_{i2}\|^2 &\leq \Delta_i(t) \int_{t_i}^{t_{i+1}} E_i \|S(s, t_i) \circ U(t_{i+1}, t_i) \eta(t_i) - V(s, t_i) \circ \eta(t_i)\|^2 ds \\ &\leq C_2 (\Delta_i(t))^3 \\ E_i \|\theta_{i3}\|^2 &\leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} E_i \|S(s, t_i) \circ U(t_{i+1}, t_i) \eta(t_i) - V(s, t_i) \circ \eta(t_i)\|^2 ds \leq \\ &\int_{t_i}^{t_{i+1}} (2E_i \|S(s, t_i) \circ U(s, t_i) \eta(t_i) - V(s, t_i) \circ \eta(t_i)\|^2 + \\ &+ 2E_i \|S(s, t_i) \circ U(s, t_i) \eta(t_i) - S(s, t_i) \circ U(t_{i+1}, t_i) \eta(t_i)\|^2) ds \leq C_3 (\Delta_i(t))^3,\end{aligned}$$

Де сталі C_1, C_2, C_3 залежать від сталих в оцінках (4), (5). Для оцінки $\|\theta_{i4}\|^2$ треба скористатися умовою приналежності початкової функції області визначення необмеженого оператора $A(s)$. Тоді в силу неперервності на області визначення маємо оцінку

$$E_i \|\theta_{i4}\|^2 \leq \Delta_i(t) \int_{t_i}^{t_{i+1}} E_i \|U(s, t_i) \eta(t_i) - V(s, t_i) \circ \eta(t_i)\|_1^2 ds \leq C_4 (\Delta_i(t))^3.$$

Де стала C_4 залежить від коефіцієнтів і $\|\varphi\|_1$.

Таким чином, остаточно

$$\Delta = E \|\mu(t)\|^2 \leq \sum_{i=0}^n C \Delta_i(t)^{3/2} \leq \rho(\Delta_i t)^{1/2}$$

$\rho = \rho(C, \|\varphi\|_1)$. Звідки $\Delta \rightarrow 0$, коли $\Delta_i t \rightarrow 0$. Що і доводить твердження теореми. Можна зробити висновок, що сильно неперервна еволюційна сім'я операторів $V(t, t_0)\varphi$ на області визначення є розрешаючим оператором стохастичного рівняння з частинними похідними.

Висновки та перспективи. Стохастичне рівняння з необмеженим операторним коефіцієнтом знесення моделює рівняння в частинних похідних з випадковим збуренням. Дослідження умов існування єдиного розв'язку рівняння такого типу дає можливість подальшого дослідження в різних напрямках великого класу реальних фізичних процесів, які знаходяться під впливом різних випадкових факторів [4] [17]. Це відповідає, наприклад, ситуації випадкового збурення рівняння Бюргера [14]. Можливо розглядати стохастичне рівняння в функціональному просторі, в якому знесення є дисипативним оператором [14] [3].

Дослідження дифузійного процесу дає можливість розглядати відповідне рівняння Колмогорова, а також аналізувати властивості слабких розв'язків цього рівняння.

Література

1. *Тихонов А.Н. Самарский А.А.* Уравнения математической физики. Изд. Наука, М., 1977г.
2. О мультипликативных представлениях решений уравнений переноса со случайными коэффициентами. Сб. Теплопроводность и конвективный теплообмен. Наукова думка. 1977 г.
3. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, Москва, 1967. 464с.
4. *Белопольская Я.И., Наголкина З.И.* О мультипликативных представлениях решений нелинейных стохастических уравнений, сб: Вероятностные распределения в бесконечномерном пространстве. Київ : Наукова думка, 1978.
5. *Тетерина Н.И.* Мультипликативные стохастические интегралы с операторными значениями, УМН, 1973.
6. *Баклан В.В.* О существовании решений стохастических уравнений в гильбертовом пространстве. ДАН УССР, 10, 1963, 1299–1303с.
7. *Далецкий Ю.Л., Тетерина Н.И.* Мультипликативные стохастические интегралы. УМН 1972. Вип. 27 (2). С. 167–169.
8. *Trotter H,* On the Product of Semigroup of Operators. Proc. AMS, 1959. Вип. 10, С. 545–551.
9. *Крылов Н.В., Розовский В.Л.* О задаче Коши для линейных стохастических уравнений с частными производными. Изв. АН СССР , 1977. Т. 41, №6. С. 1328–1347.
10. *Pardoux E.* Sur des equation aus derivas particalis stochastiques monotones.-С.Н. Acad. Sci. Paris, 1972, t. 275 A, №3, p101-103.
11. *Белопольская Я.И., Наголкина З.И.* Об одном классе стохастических уравнений с частными производными. Теория вероятностей и ее применение. 1982. Вип. 3, С. 551–559.
12. *Йосида К.* Функциональный анализ, Москва : Мир, 624 с.
13. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов, Т. 3. Москва : Изд. Наука. 1973 г.
14. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. Москва : Мир, 1985. 376с.
15. *Далецкий Ю.Л., Фомин С.В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. Москва : Наука, 1983. 384с.
16. *Наголкина З.И., Филонов Ю.П.* Мультипликативна апроксимація випадкового процесу. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*, 2021. Вип. 100. С. 201-214. <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2021.100.205-214>

17. Наголкіна З.І., Філонов Ю.П. Схема мультиплікативних представлень для стохастичного рівняння з двома вінерівськими процесами. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*, 2022. Вип. 102. С. 136-148. <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2021.102.136-148>

References

1. Tikhonov, A. N., & Samarskii, A. A. (1977). *Urvneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Nauka. {in Russian}
2. О мультиплікативних представленнях рішень рівнянь переносу з випадковими коефіцієнтами [On multiplicative representations of solutions to transfer equations with random coefficients]. (1977). In *Teploprovodnost i konvektivnyi teploobmen* [Thermal Conductivity and Convective Heat Transfer]. Naukova Dumka. {in Russian}
3. Krein, S. G. (1967). *Lineynye differentsialnye uravneniia v banakhovom prostranstve* [Linear differential equations in Banach space]. Nauka. {in Russian}
4. Belopolskaia, Ya. I., & Nagolkina, Z. I. (1978). О мультиплікативних представленнях рішень нелінійних стохастических рівнянь [On multiplicative representations of solutions to nonlinear stochastic equations]. In *Veroiatnostnye raspredeleniia v beskonechnomernom prostranstve* [Probability Distributions in Infinite-Dimensional Space]. Naukova Dumka. {in Russian}
5. Teterina, N. I. (1973). Мультиплікативні стохастическіє інтегралі з операторними значеннями [Multiplicative stochastic integrals with operator values]. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* [Russian Mathematical Surveys], 28(4), 213–214. {in Russian}
6. Baklan, V. V. (1963). О існуванні рішень стохастических рівнянь в гільбертовому просторі [On the existence of solutions to stochastic equations in a Hilbert space]. *Doklady Akademii Nauk Ukrainskoi SSR* [Reports of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR], (10), 1299–1303. {in Russian}
7. Daletskii, Yu. L., & Teterina, N. I. (1972). Мультиплікативні стохастическіє інтегралі [Multiplicative stochastic integrals]. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* [Russian Mathematical Surveys], 27(2), 167–169. {in Russian}
8. Trotter, H. F. (1959). On the product of semigroups of operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 10(4), 545–551. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1959-0108732-6>
9. Krylov, N. V., & Rozovskii, B. L. (1977). О задаче Коши для лінійних стохастических рівнянь з частними похідними [On the Cauchy problem for linear stochastic partial differential equations]. *Izvestiia Akademii Nauk SSSR. Serii Matematicheskaiia* [Mathematics of the USSR-Izvestiya], 41(6), 1328–1347. {in Russian}

10. *Pardoux, E.* (1972). Sur des équations aux dérivées partielles stochastiques monotones [On monotone stochastic partial differential equations]. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences. Série A*, 275(3), 101–103. {in French}
11. *Belopolskaia, Ya. I., & Nagolkina, Z. I.* (1982). Ob odnom klasse stokhasticheskikh uravnenii s *chastnymi proizvodnymi* [On a class of stochastic partial differential equations]. *Teoriia Veroiatnostei i ee Primeneniia* [Theory of Probability & Its Applications], 27(3), 551–559. {in Russian}
12. *Yosida, K.* (1965). *Funktsionalnyi analiz* [Functional analysis]. Mir. {in Russian}
13. *Gikhman, I. I., & Skorokhod, A. V.* (1973). *Teoriia sluchainykh protsessov* [The theory of stochastic processes] (Vol. 3). Nauka. {in Russian}
14. *Henry, D.* (1985). *Geometricheskaia teoriia polulineynykh parabolicheskikh* {in Russian}
15. *Daletskii, Yu. L., & Fomin, S. V.* (1983). *Mery i differentsialnye uravneniia v beskonechnomernykh prostranstvakh* [Measures and differential equations in infinite-dimensional spaces]. Nauka. {in Russian}
16. *Nagolkina, Z. I., & Filonov, Yu. P.* (2021). Multiplikatyvna aproksymatsiia vypadkovoho protsesu [Multiplicative approximation of a random process]. *Prykladna Heometriia ta Inzhenerna Hrafika* [Applied Geometry and Engineering Graphics], (100), 201–214. <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2021.100.201-214>
17. *Nagolkina, Z. I., & Filonov, Yu. P.* (2022). Skhema multiplikatyvnykh predstavlen dlia stokhastychnoho rivniannia z dvoma vinerskymy protsesamy [Scheme of multiplicative representations for a stochastic equation with two Wiener processes]. *Prykladna Heometriia ta Inzhenerna Hrafika* [Applied Geometry and Engineering Graphics], (102), 136–148. <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2021.102.136-148>

Ph. D., assoc. Prof **Zoya Nagolkina**

zonagol@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2722-5176

Ph. D., assoc. Prof **Yuri Filonov**,

yuri@fil.in.ua, ORCID: 0000-0002-1100-4854

Ph. D., assoc. Prof. **Ludmyla Sokolova**

ludvitso@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1596-4932

Kyiv National University of Construction and Architecture» (KNUCA)

CAUSHY PROBLEM FOR A CLASS OF STOCHASTIC EQUATIONS WITH PARTIAL DERIVATIVES

This paper considers a stochastic partial differential equation. The conditions under which the Cauchy problem has a unique solution are determined.

Equations of this type are mathematical models for processes, such as heat conduction and diffusion, that occur in a randomly inhomogeneous medium, or in the presence of external random fluctuations that affect the process. A stochastic model in the form of the Ito equation is considered. The unperturbed part is a partial differential equation in operator form. The decomposition in the equation consists of two parts - an unbounded closed operator $A(t)$, which is a differential operator, and a bounded function, which satisfies the standard conditions. An equation of this type goes beyond the classical theory of differential equations. Therefore, the solution is expressed in terms of the evolution operator $U(t, t_0)$ and the integral part, which takes into account the random perturbation as inhomogeneity. In this case, $U(t, t_0)\varphi$ is a strongly continuous evolutionary operator generated by the Cauchy problem for the unperturbed equation. The existence of a solution to such an operator-stochastic equation is investigated by the method, which is a probabilistic analogue of the method known in the theory of evolutionary equations as the Daletsky-Trotter method of multiplicative representations: $\eta(t) = P - \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n S(t_{k+1}, t_k) \circ U(t_{k+1}, t_k)\varphi$. $S(t, \tau)$ is a strongly continuous stochastic operator generated by the solution to the stochastic equation describing a random perturbation in the Ito form. This allows us to investigate a new class of stochastic equations, as well as the class of strong operator stochastic families in Hilbert space. This is possible under certain additional conditions on the evolutionary operator $U(t, t_0)$, which was generated by a closed unbounded operator. These conditions were formulated in terms of the properties of the corresponding resolvent of the unbounded demolition operator. The solution is considered as the limit of the multiplicative representation of the evolutionary families of operators for the deterministic and random parts, respectively. The conditions are determined under which this multiplicative representation will be the unique solution of the stochastic differential equation $d\eta_\varphi(t) = A(t)\eta_\varphi(t)dt + a(t, \eta_\varphi(t))dt + dB(t, \eta_\varphi, w)$. The formulation of this problem became possible using the apparatus of semigroups. To prove the existence of a unique solution, a stochastic analogue of the Holmgren method, known in the theory of semigroups, was used.

Keywords: Stochastic differential equation; unbounded operator; closed operator; domain of operator definition; Hilbert space; Banach space; complete space; flow of σ -algebras; heat equation; multiplicative representation; Chebyshev inequality; Holmgren's lemma; Gronwall's lemma; Cauchy problem; unity of solution; evolutionary operator.