

к. т. н., доцент, **Несвідомін А.В.**,
a.nesvidomin@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1495-1718

д. т. н., професор, **Пилипака С.Ф.**,
s.pylypaka@nubip.edu.ua ORCID 0000-0002-1496-4615,

к. т. н., доцент, **Бабка В.М.**,
babkavitaliy@ukr.net, ORCID 0000-0003-4971-4285, д. т. н., проф.

к. т. н., доцент, **Грищенко І.Ю.**,
irgr@yahoo.com, ORCID 0000-0002-1000-9805

Національний університет біоресурсів і природокористування
України

КОНСТРУЮВАННЯ ДУГИ ПЕРЕХІДНОЇ КРИВОЇ ІЗ ЗАДАНИМИ КРИВИНАМИ НА ЇЇ КІНЦЯХ

В інженерній практиці конструювання кривих ліній заданої конфігурації широко використовуються сплайни. Зазвичай такі криві є складеними із дуг алгебраїчних поліномів за першим порядком гладкості. В точках з'єднання дуг дотична спільна, а кривина має різне значення. Для деяких задач така складена крива є прийнятною. Відомий приклад – побудова овалів в аксонометричних проєкціях замість еліпсів. Однак є задачі, де спільної дотичної в точці з'єднання дуг недостатньо, а потрібна ще і рівність кривин, тобто з'єднання дуг повинне відбуватися за другим порядком гладкості. Для цього випадку прикладом служить перехідна крива залізничних колій. При переході від прямолінійної ділянки колії до криволінійної в точці їх з'єднання перший порядок неприпустимий. Справа в тому, що на прямолінійному відрізку на рухомий об'єкт не діє відцентрова сила, яка діє на криволінійному відрізку прямо пропорційно його кривині. Раптовий перехід від нульової кривини в точці з'єднання до певного її значення (що можливо при переході від відрізка прямої до дуги кола) викликає динамічний удар. Це призводить до дискомфорту пасажирів і підвищеного зносу рейок і коліс.

Закономірність зміни кривини від початкової до кінцевої величини можна задати натуральним рівнянням. При цьому вихідними умовами мають бути значення кривин на початку і в кінці дуги кривої. Але цього недостатньо. Щоб кривина змінювалася плавно, потрібно забезпечити в цих точках дотичні до графіку кривини, які мають бути паралельними осі абсцис. Це означає рівність нулю похідної натурального рівняння в цих точках. Таким чином знаходження натурального рівняння перехідної кривої зводиться до виконання чотирьох умов у початковій і кінцевій точках дуги перехідної кривої. Забезпечення цих умов можна виконати за допомогою кубічного полінома.

У результаті розв'язку системи чотирьох рівнянь знайдено коефіцієнти кубічного полінома після чого натуральне рівняння стає визначеним. Побудова самої кривої здійснюється за відомими формулами переходу від параметричного до натуральних рівнянь із застосуванням чисельних методів. Наведено приклади із побудови перехідних кривих для заданих вихідних параметрів.

Ключові слова: натуральне рівняння; довжина дуги кривина; система рівнянь; порядок гладкості.

Постановка проблеми. Задача конструювання дуг перехідних кривих із заданими кривинами на їх кінцях є актуальною при проектуванні колії залізничних доріг. Аналітичного опису кривих, які б поєднували плавний перехід від прямолінійної ділянки до криволінійної не існує. Звідси виникає задача конструювання перехідної кривої. Якщо кривина не збігається в точці з'єднання кривих, перехід буде різким, навіть якщо траса візуально здається гладкою. Це призводить до миттєвого стрибка величини доцентрового прискорення і, відповідно, відцентрової сили. Плавний розподіл відцентрової сили мінімізує ударні навантаження на рейки, шпали та елементи підвіски транспортного засобу, значно продовжуючи їх термін служби.

Але не тільки в залізничному транспорті потрібно з'єднувати ділянки колій за другим порядком гладкості. У комп'ютерному проектуванні (наприклад, при проектуванні лез турбін, автомобільних кузовів або верстатних траєкторій) неперервність є обов'язковою умовою для естетичної привабливості та якості фрезерування. Такий підхід перетворює потенційно небезпечні та різкі переходи у плавні та передбачувані. З огляду на це конструювання дуг для з'єднання ділянок кривих за другим порядком гладкості є актуальним завданням.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Багато праць із дослідження у сфері проектування перехідних кривих (ділянок, що плавно з'єднують пряму колію з криволінійною ділянкою) зосереджені на забезпеченні максимальної плавності руху та зниженні динамічних навантажень. У працях [1, 2], пропонується моделювання просторових перехідних кривих, описуючи їхню кривину та скрут як функцію довжини дуги за допомогою полінома. В праці [3] запропоновано поліном використовувати для опису не залежності кривини та скриту від довжини, а самої форми кривої. У дослідженнях використовувалися різні геометричні моделі: у роботі [4] розглядалася раціональна квадратична крива Безьє, тоді як у [5] за перехідну криву розглянуто синусоїду. У роботі [6] розглядається розробка такої функції залежності кривини від довжини перехідної кривої, яка забезпечувала б абсолютно плавну зміну цього параметра на всьому відрізку, включаючи початкову та кінцеву точки. Для цього було запропоновано описати цю залежність поліномом

п'ятого ступеня, коефіцієнти якого визначаються з умови гарантування плавності зміни кривини в усіх точках. Роботу [7] присвячено конструюванню плоских і просторових кривих ліній за допомогою розробленого конструктивно-пошукового. В основу способу покладено натуральні рівняння кривих ліній, а саме рівняння у функціях натуральних параметрів, наприклад, залежності кривини кривої лінії від довжини дуги. Автори замість традиційних поліноміальних сплайнів задають форму кривої лінії керуючою ламаною (графіком), яка апроксимує натуральне рівняння. Запропонований підхід дозволяє формувати обриси плоских або просторових кривих змінної кривини, що є критично важливим під час вирішення різноманітних інженерних задач. Оригінальний підхід локальної інтерполяції дугами клотоїди з другим порядком гладкості запропоновано в праці [8]. У роботі представлено алгоритм побудови обрису (плоскої кривої лінії) магістрального перехрещення.

У роботі [9] розглядається варіант створення з двох дуг кіл проміжної кривої, яка гармонійно проходить між ними, забезпечуючи плавність переходу кривини від першої дуги до другої. У праці акцентується увага на тому, що звичайні криві Безьє не можуть точно відтворити всі конічні перерізи, тому пропонується вирішити цю проблему шляхом введення вагових коефіцієнтів для кожної контрольної точки. Завдяки цим ваговим коефіцієнтам раціональні криві Безьє можуть точно представляти конічні перерізи, що є критично важливим для багатьох застосувань у САД-системах.

Формулювання цілей та завдання статті. Розробити аналітичний спосіб побудови дуги перехідної кривої із заданими значеннями кривини на її кінцях.

Основна частина. Конструювати криву будемо за натуральним рівнянням $k=k(s)$, де k – кривина кривої, s – її довжина. Можливі варіанти графіка показано на рис. 1.

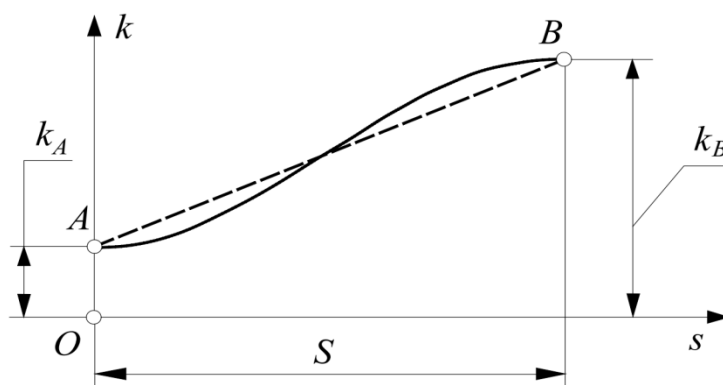


Рис. 1. Варіанти графіка натурального рівняння, що відповідає довжині дуги S перехідної кривої AB

На кінцях дуги перехідної кривої довжиною S задані значення кривини: в початковій точці A кривина має значення k_A і в кінцевій точці B

– k_B . При лінійній залежності, яка на графіку позначена штриховою лінією, перехідною кривою буде дуга клотоїди.

В такому випадку кривини в точці з'єднання сусідніх дуг будуть рівними, однак зміна кривини не буде плавною. Для того, щоб вона була плавною, дотична до графіка в точках A і B повинна бути паралельною осі абсцис. Такий графік на рис. 1 зображений суцільною кривою. Таким чином, графік має задовольняти чотири умови: значення кривин в точках A і B та нульові значення похідних натурального рівняння в цих точках. Натуральне рівняння будемо шукати у вигляді полінома, який в такому випадку буде кубічним:

$$k = a + bs + cs^2 + ds^3. \quad (1)$$

Знаходимо похідну натурального рівняння (1):

$$k' = b + 2cs + 3ds^2. \quad (2)$$

Складаємо систему із чотирьох рівнянь. У перших двох зазначається значення кривини (1) у точках A і B , а у наступних двох – значення похідної (2) у цих точках:

$$\begin{aligned} k_A &= a + bs_A + cs_A^2 + ds_A^3; \\ k_B &= a + bs_B + cs_B^2 + ds_B^3; \\ 0 &= b + 2cs_A + 3ds_A^2; \\ 0 &= b + 2cs_B + 3ds_B^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Відлік дуги починаємо з точки A . Тоді $s_A=0$, $s_B=S$. Розв'язавши систему лінійних рівнянь (3) із врахуванням значень довжин в точках A і B , отримуємо наступні вирази сталих коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} a &= k_A; & b &= 0; \\ c &= \frac{3(k_B - k_A)}{S^2}; & d &= -\frac{2(k_B - k_A)}{S^3}. \end{aligned} \quad (4)$$

Із врахуванням (4) натуральне рівняння (1) набуває вигляду:

$$k = k_A + \frac{3(k_B - k_A)}{S^2} s^2 - \frac{2(k_B - k_A)}{S^3} s^3. \quad (5)$$

Якщо кривини на кінцях дуги рівні, то згідно (5) її кривина буде сталою, тобто це буде дуга кола.

В залежності від довжини S дуга може бути замкнена або не замкнена, тобто це залежить від кута φ між дотичними на кінцях дуги. Значення поточного кута α від початку кривої в залежності від довжини s знаходимо інтегруванням виразу (5):

$$\alpha = \int k(s) ds = k_A s + \frac{k_B - k_A}{S^2} s^3 - \frac{k_B - k_A}{2S^3} s^4. \quad (6)$$

Кут φ між дотичними до дуги перехідної кривої на її кінцях визначиться із (6) при $s=S$:

$$\varphi = \frac{S}{2}(k_A + k_B), \quad \text{звідки} \quad S = \frac{2\varphi}{k_A + k_B}. \quad (7)$$

Згідно (7) може бути два варіанти побудови перехідної кривої:

1. задаємо кривини k_A і k_B на кінцях дуги кривої і її довжину S , тоді кут φ при цьому визначиться із першого виразу (7);

2. задаємо кривини k_A і k_B на кінцях дуги кривої і кут φ , тоді ми отримаємо криву із заданими кривинами на кінцях і заданим кутом φ .

Для другого варіанту побудови перехідної кривої в натуральному рівнянні (5) змінна s повинна змінюватися не в межах $s=0\dots S$, де S визначається із другого виразу (7), адже довжина дуги кривої не відповідатиме початковому значенню. Це зручно пояснити для дуги кола заданої кривини: якщо ми задаємо довжину дуги, то кут обчислюється відповідно до її довжини, а при заданому куті обчислюється її довжина.

Побудова самої перехідної кривої відбувається за відомими формулами переходу від натурального до параметричних рівнянь:

$$x = \int \cos \alpha(s) ds; \quad y = \int \sin \alpha(s) ds, \quad (8)$$

де залежність $\alpha=\alpha(s)$ наведена в (6). Вони потребують чисельних методів інтегрування, окрім випадку, коли $k_A=k_B$, тобто для кола.

На рис. 2, побудовано перехідні криві для $k_A=0$, $k_B=1$ і різних значень довжини дуги S . На рис. 2,б побудовано дугу кривої із такими ж значеннями кривини на її кінцях, але при заданому куті $\varphi=\pi=180^\circ$. При цьому довжина дуги згідно другого виразу (7) складає $S=2\pi$. Для наочності на другому кінці кривої побудоване коло кривини, що відповідає кривині $k_B=1$. Радіус кола кривини теж дорівнює одиниці, як обернена до кривини величина.

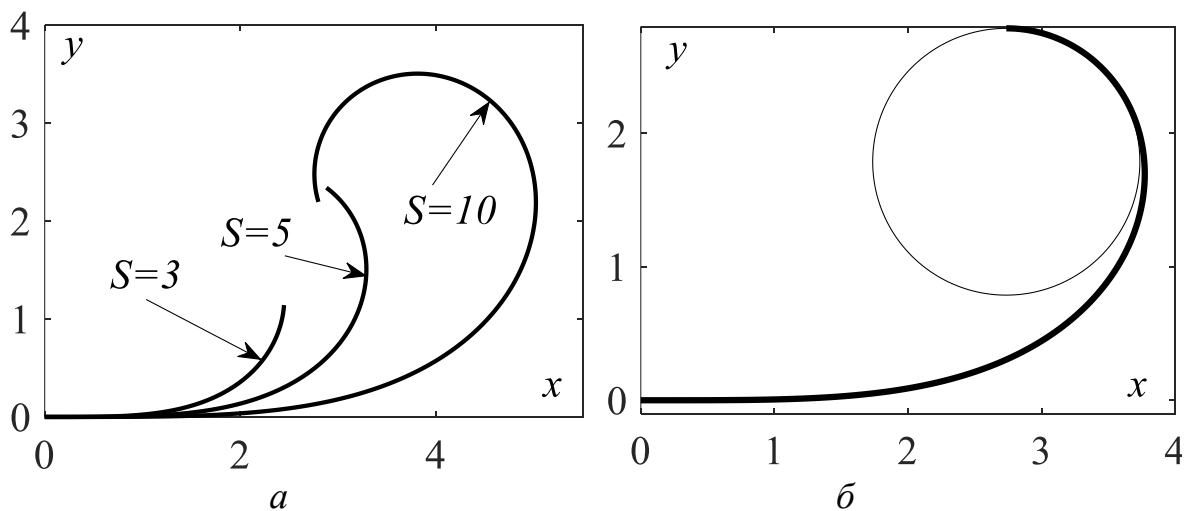


Рис. 2. Перехідні криві з кривинами на кінцях дуги $k_A=0$ і $k_B=1$:

- а) дуги із різною довжиною дуги s ;
б) дуга із заданим кутом $\varphi=\pi=180^\circ$

На рис. 3 побудовані перехідні криві для кута $\varphi=90^\circ$ із однаковими абсолютними значеннями кривини на кінцях: $k_A=3$, $k_B=1$, при цьому

кривини мають однакові або різні знаки. На рис. 3, а знаки кривини додатні, а на рис. 3, б, в – різні.

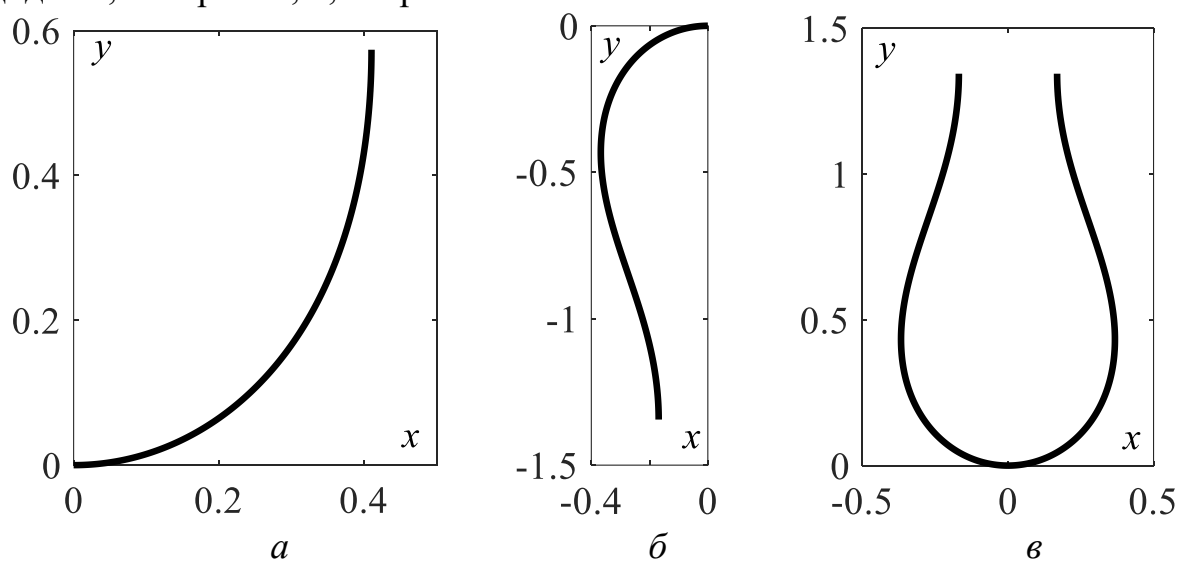


Рис. 3. Перехідні криві для кута $\varphi=90^\circ$ з однаковим абсолютним значенням кривини на кінцях дуги:
 а) $k_A=3$ і $k_B=1$; б) $k_A=-3$ і $k_B=1$; в) $k_A=3$ і $k_B=-1$

На рис. 3, в побудована симетрична крива, в результаті чого отримано складену криву з другим порядком гладкості.

На рис. 4 побудовано аналогічні криві для кута $\varphi=180^\circ$ із однаковими абсолютними значеннями кривини на кінцях: $k_A=2$, $k_B=1$. Для наочності на рис. 4,а на кінцях кривої побудовано кола кривини.

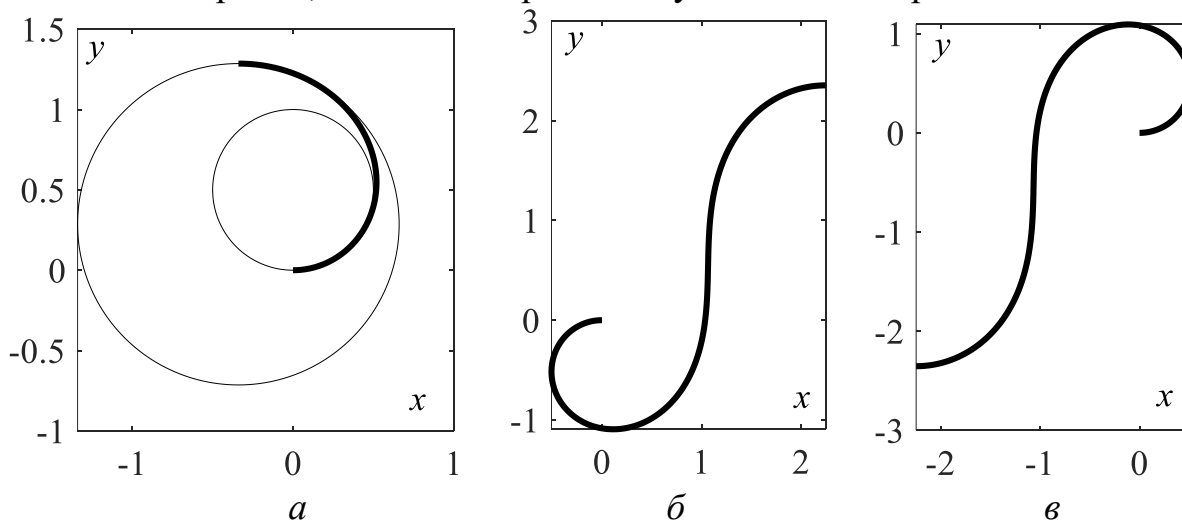


Рис. 4. Перехідні криві для кута $\varphi=180^\circ$ з однаковим абсолютним значенням кривини на кінцях дуги:
 а) $k_A=2$ і $k_B=1$; б) $k_A=-2$ і $k_B=1$; в) $k_A=2$ і $k_B=-1$

Неважко побачити, що при різних знаках кривини перехідна крива має точку перегину. При зміні знаку кривини на кінцях такої дуги на протилежний отримуємо іншу криву, яка має центральну симетрію відносно початку координат. При рівних абсолютних значеннях кривин, які мають протилежний знак побудова перехідної кривої при заданому куті

φ неможлива в силу того, що згідно з другою залежністю (7) її довжина нескінченна. Однак для випадку, коли кут φ не має значення, а задається довжина дуги S , крива набуває вигляду клотоїди (рис. 5,а), однак не є нею, оскільки кривина змінюється не по лінійному закону (рис. 5,б).

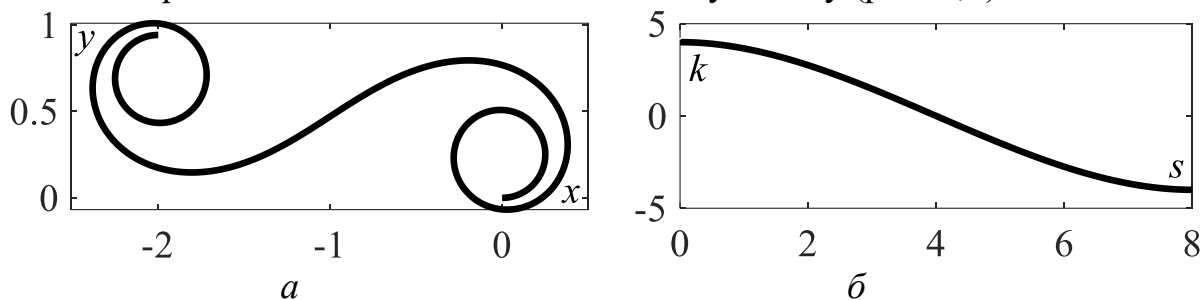


Рис. 5. Графічні ілюстрації до перехідної кривої з кривинами на кінцях дуги $k_A=4$, $k_B=-4$ і довжиною $S=8$:
 а) зображення дуги кривої;
 б) графік кривини дуги кривої

При збільшенні довжини дуги S збільшується кількість витків кривої, одна кут φ на її кінцях завжди буде рівним нулю згідно першого виразу (9).

Тривалий час вважалося, що для заокруглення залізничних колій дуга клотоїди є найбільш прийнятним варіантом. В результаті підвищення швидкості потягів для перехідних кривих стала актуальною задача більш плавної зміни кривини в порівнянні із клотоїдою [6]. Аналітично розрахована і побудована на рис. 5, а дуга модернізованої клотоїди є одним із результатів розв'язання цієї задачі.

Висновки. Перехідна крива може бути побудована за натуральним рівнянням плавної зміни кривини від початкової точки дуги до кінцевої. Натуральне рівняння описується кубічним поліномом у функції довжини дуги. При цьому можливі два варіанти побудови перехідної кривої. При першому варіанті задається значення кривини на кінцях дуги кривої і її довжина. При другому варіанті задається значення кривини і кут між дотичними на кінцях дуги кривої. Побудова кривої вимагає чисельного інтегрування виразів. При протилежних знаках кривини на кінцях дуги перехідна крива має точку перегину. Якщо при цьому абсолютні значення кривини рівні, то крива за формою буде подібна до клотоїди з більш плавним графіком зміни кривини.

Література

1. *Brustad T. F., Dalmo R.* Railway transition curves – optimization and assessment. *Infrastructures*. 2020. Vol. 5, iss. 5. URL: <https://www.mdpi.com/2412-3811/5/5/43> (дата звернення: 31.03.2026).
2. *Борисенко В. Д., Устенко С. А., Устенко І. В.* Геометричне моделювання просторових перехідних кривих залізничних колій. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2017. № 4. С. 33–39.

- URL: http://journal.zntu.edu.ua/ric2/files/RIU_2017_4.pdf (дата звернення: 30.01.2026).
3. *Brustad T. F., Dalmo R.* Exploring Benefits of Using Blending Splines as Transition Curves. *Applied Sciences*. 2020. Vol. 10, iss. 12. Art. 4226. DOI: <https://doi.org/10.3390/app10124226>
 4. *Ahmad A., Ahmat N., Adnan M.* Fair Transition Spiral Using a Single Rational Quadratic Bézier Curve. *Journal of Computer Science & Computational Mathematics*. 2020. Vol. 10, iss. 1). P. 7–12. DOI: <https://doi.org/10.20967/jcscm.2020.01.002>
 5. *Pirti A., Yücel M. A., Ocalan T.* Transrapid and the transition curve as sinusoid. *Tehnički vjesnik*. 2016. Vol. 23, iss. 1. P. 315–320. URL: <https://hrcak.srce.hr/en/file/225615> (дата звернення: 20.04.2026).
 6. *Борисенко В. Д., Устенко С. А.* Геометричне моделювання залізничної колії на криволінійній ділянці. *Прикладні науково-технічні дослідження* : матеріали V міжнар. наук.-практ. конф. (м. Івано-Франківськ, 2021 р.). Івано-Франківськ, 2021. С. 80–82. URL: https://ukrtsa.org.ua/wp-content/uploads/2022/02/ConferenceATSU_2021.pdf (дата звернення: 10.04.2026).
 7. *Анпілогова В. О., Ботвіновська С. І., Анпілогов А. Г.* Моделювання кривих ліній за допомогою управляючих ламаних, що визначають їх натуральні рівняння. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2003. Вип. 72. С. 124–129.
 8. *Ботвіновська С. І.* Дискретне моделювання обрисів магістральних перехрещень за керуючими чинниками параметрів натуральних рівнянь : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : спец. 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка». Київ, 2003. 21 с.
 9. *Wan Zakaria, W. Z. E., & Md Ali, J.* Shaped curve by blending two circular arcs. *AIP Conference Proceedings*, 2014. Vol. 1605, iss.1. 482–487. <https://doi.org/10.1063/1.4887636>

References

1. *Brustad, T. F., & Dalmo, R.* (2020). Railway transition curves – optimization and assessment. *Infrastructures*, 5(5), Article 43. <https://www.mdpi.com/2412-3811/5/5/43>
2. *Borysenko, V. D., Ustenko, S. A., & Ustenko, I. V.* (2017). Heometrychne modeliuvannia prostorovykh perekhidnykh kryvykh zaliznychnykh kolii [Geometric modeling of spatial transition curves of railway tracks]. *Radioelektronika, Informatyka, Upravlinnia* [Radio Electronics, Computer Science, Control], (4), 33–39. http://journal.zntu.edu.ua/ric2/files/RIU_2017_4.pdf {in Ukrainian}

3. *Brustad, T. F., & Dalmo, R.* (2020). Exploring Benefits of Using Blending Splines as Transition Curves. *Applied Sciences*, 10(12), Article 4226. <https://doi.org/10.3390/app10124226>
4. *Ahmad, A., Ahmat, N., & Adnan, M.* (2020). Fair transition spiral using a single rational quadratic Bézier curve. *Journal of Computer Science & Computational Mathematics*, 10(1), 7–12. <https://doi.org/10.20967/jcscm.2020.01.002>
5. *Pirti, A., Yücel, M. A., & Ocalan, T.* (2016). Transrapid and the transition curve as sinusoid. *Tehnički Vjesnik*, 23(1), 315–320. <https://hrcak.srce.hr/en/file/225615>
6. *Borysenko, V. D., & Ustenko, S. A.* (2021). Heometrychne modeliuвання zaliznychnoi kolii na kryvoliniinii diliantsi [Geometric modeling of railway track on a curved section]. In *Prykladni naukovo-tekhnichni doslidzhennia: materialy V mizhnar. nauk.-prakt. konf.* [Applied Scientific and Technical Research: Proceedings of the V International Scientific and Practical Conference] (pp. 80–82). Ivano-Frankivsk. https://ukrtsa.org.ua/wp-content/uploads/2022/02/ConferenceATSU_2021.pdf {in Ukrainian}
7. *Anpilohova, V. O., Botvinovska, S. I., & Anpilohov, A. H.* (2003). Modeliuвання kryvykh linii za dopomohoiu upravliaiuchykh lamanykh, shcho vyznachaiut yikh naturalni rivniannia [Modeling of curved lines using control polylines that determine their natural equations]. *Prykladna Heometriia ta Inzhenerna Hrafika* [Applied Geometry and Engineering Graphics], (72), 124–129. {in Ukrainian}
8. *Botvinovska, S. I.* (2003). Diskretne modeliuвання obrysiv mahistralnykh perekhreshchen za keruiuchymy chynnykamy parametriv naturalnykh rivnian [Discrete modeling of main intersections outlines by governing factors of natural equation parameters] (Unpublished candidate's dissertation). Kyiv National University of Construction and Architecture. {in Ukrainian}
9. *Wan Zakaria, W. Z. E., & Md Ali, J.* Shaped curve by blending two circular arcs. *AIP Conference Proceedings*, 2014. Vol. 1605, iss.1. 482–487. <https://doi.org/10.1063/1.4887636>

PhD, assistant professor **Andrii Nesvidomin**,
a.nesvidomin@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1495-1718

Ph. D., prof **Serhiy Pylypaka**,
s.pylypaka@nubip.edu.ua ORCID 0000-0002-1496-4615

Ph.D., assoc. prof. **Iryna Hryshchenko**,
irgr@yahoo.com, ORCID: 0000-0002-1000-9805

PhD, assistant professor **Vitaly Babka**.
babkavitaliy@ukr.net, ORCID: 0000-0003-4971-4285

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

CONSTRUCTION OF A TRANSITION CURVE WITH SPECIFIED CURVATURES AT ITS ENDS

In engineering practice, splines are widely used to construct curved lines of a given configuration. Typically, such curves are composed of arcs of first-order smoothness algebraic polynomials. At the points where the arcs meet, the tangent is common, but the curvature varies. For some problems, such a composite curve is acceptable. A well-known example is the construction of ovals in axonometric projections instead of ellipses. However, there are problems where a common tangent at the point of connection between arcs is insufficient, and equality of curvatures is also required; that is, the connection of arcs must occur with second-order smoothness. An example of this case is the transition curve of railroad tracks. When transitioning from a straight section of track to a curved one at their junction, first-order smoothness is unacceptable. The reason is that on a straight segment, no centrifugal force acts on a moving object, whereas on a curved segment, it acts in direct proportion to its curvature. A sudden transition from zero curvature at the junction to a specific value (which is possible when transitioning from a straight segment to a circular arc) causes a dynamic shock. This leads to passenger discomfort and increased wear on the rails and wheels.

The pattern of curvature change from the initial to the final value can be described by a natural equation. The initial conditions must be the curvature values at the beginning and end of the curve's arc. But this is not enough. For the curvature to change smoothly, it is necessary to ensure that at these points there are tangents to the curvature graph, which must be parallel to the x-axis.

The pattern of change in curvature from the initial to the final value can be described by a natural equation. The initial conditions must be the values of the curvature at the beginning and end of the curve. However, this is not sufficient. For the curvature to change smoothly, it is necessary to ensure that the tangents to the curvature graph at these points are parallel to the x-axis. This implies that the derivative of the natural equation must be zero at these points. Thus, finding the natural equation of the transition curve boils down to satisfying four conditions at the initial and final points of the transition curve's arc. These conditions can be satisfied using a cubic polynomial.

As a result of solving the system of four equations, the coefficients of the cubic polynomial are found, after which the natural equation becomes determined. The curve itself is constructed using known formulas for the transition from parametric to natural equations with the application of numerical methods. Examples of constructing transition curves for given initial parameters are provided.

Keywords: natural equation; arc length, curvature; system of equations; order of smoothness.