

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЙНИЙ ПІДХІД ДО ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ НЕДОСТУПНОЇ ТОЧКИ ОБ'ЄКТА БУДІВНИЦТВА

У статті розроблено оптимізаційний підхід до визначення параметрів недоступної точки об'єкта будівництва на основі тривимірної геометричної моделі з мимобіжними візирними променями. Виявлено основну наукову проблему – об'єктивне протиріччя між необхідністю отримання однозначного та стійкого геометричного розв'язку та неможливістю його забезпечення в рамках класичної моделі з пересічними променями, яка в реальних умовах (через похибки вимірювань) дає до 18 варіантів координат. Запропоновано перехід від пошуку точки перетину променів до задачі знаходження мінімальної відстані між мимобіжними променями, що забезпечує коректність (існування, єдиність, стійкість) розв'язку. Наведено аналітичне обґрунтування: квадрат відстані між точками на різних променях є функцією двох змінних, мінімум якої знаходиться через розв'язання системи диференціальних рівнянь методом Крамера. Експериментальну перевірку виконано на реальному об'єкті – Будинку Руссова в Одесі (пам'ятка архітектури, історична зона). За допомогою теодоліта виміряно кути $\alpha=21,18^\circ$, $\beta=63,9^\circ$, $\gamma=19,97^\circ$ та базис $AB=45600$ мм. Розраховано граничні точки мінімальної відстані та координати шуканої точки: $x=0$ мм, $y=93256$ мм, $z=36935$ мм. Абсолютна похибка становить $\Delta y=269$ мм, $\Delta z=694$ мм, відносна похибка – 0,29% та 1,88% відповідно, що є прийнятним для будівельної практики. Показано, що запропонований підхід має переваги: універсальність (працює з будь-яким оптичним обладнанням), однозначність (єдиний розв'язок замість 18 варіантів), стійкість (малі похибки не призводять до катастрофічних змін), адаптивність (можливість керування похибкою). Результати створюють теоретичне підґрунтя для впровадження ВІМ-технологій та параметричного нормування в Україні відповідно до «Зеленої книги» (2020). Розроблені моделі можуть бути інтегровані в системи автоматизованого проектування (САПР) та використані для оперативних геодезичних обстежень об'єктів культурної спадщини, зокрема в історичному центрі Одеси (зона ЮНЕСКО). Подальші дослідження передбачають створення комбінованої моделі для об'єктів,

що перетинають нульову горизонтальну площину, та адаптацію алгоритму для роботи з даними безпілотних літальних апаратів.

Ключові слова: об'єкт будівництва; недоступна точка; мимобіжні візирні промені; оптимізаційна модель; геометричне моделювання; BIM; параметричне нормування.

Актуальність дослідження. Формування паспорта реконструйованих або відновлюваних історичних об'єктів передбачає визначення їх геометричних параметрів. Такими параметрами є висота об'єкта та розміри охоронної зони. У 2020 році в Україні вийшла «Зелена книга. Системний перегляд ефективності державного регулювання. Параметричне нормування у будівництві», яка визначає стратегічний напрямок розвитку будівельної галузі – перехід від розпорядчого до параметричного методу нормування та впровадження *BIM-технологій*. *BIM-модель* потребує автоматизованого наповнення параметрами кожного елемента споруди. Особливо гостро ця проблема стоїть для об'єктів культурної спадщини, зокрема в історичному центрі Одеси (зона ЮНЕСКО), де прямий контакт ускладнений або неможливий через аварійний стан будівель. Тому створення математичного апарату для автоматизованого визначення геометричних параметрів за непрямыми даними є актуальним науково-прикладним завданням.

Постановка проблеми. Класичний підхід до визначення координат *недоступної точки*, який базується на *геометричній моделі* з пересічними візирними променями, в реальних умовах (через немінучі похибки вимірювань кутів і базису) виявляється некоректним: промені не перетинаються, а є *мимобіжними*, що призводить до 18 можливих варіантів координат і робить задачу погано обумовленою. Отже, існує об'єктивне протиріччя між необхідністю отримання однозначного та стійкого геометричного розв'язку та неможливістю його забезпечити в рамках існуючої моделі.

Аналіз досліджень і публікацій. Теоретичним основам *геометричного моделювання* присвячено праці В.Є. Михайленка, В.В. Ваніна, С.М. Ковальова, О.Ю. Браїлова та ін. [1-3]. Класичний підхід до визначення координат *недоступної точки* ґрунтується на моделі з пересічними візирними променями [2, 10]. Однак, як показано в попередніх роботах [10, 11], через немінучі похибки вимірювань реальні промені не перетинаються, а є *мимобіжними*, що дає до 18 варіантів координат. Відомі методи лазерного сканування [5, 6] забезпечують високу точність, але потребують дорогого обладнання та складної постобробки «хмар точок», що обмежує їх застосування в оперативних умовах (протиаварійні заходи, швидке обстеження). Сучасна державна політика України, закріплена в «Зеленій книзі» [9], визначає перехід до *параметричного нормування* та впровадження *BIM-технологій*. Це

потребує створення математичного апарату для автоматизованого визначення геометричних параметрів за непрямыми даними, який би забезпечував однозначність, стійкість і можливість адаптивного керування похибкою. Додаткові аспекти оптимізаційних методів у геометричних задачах висвітлено в [7, 8].

Мета та задачі статті. *Мета дослідження* — комплексно розробити тривимірну геометричну та аналітичну *оптимізаційну моделі* для визначення мінімальної області значень параметрів *недоступної точки об'єкта будівництва*.

Задачі:

1. Розробити тривимірну *геометричну модель з мимобіжними візирними променями* для безконтактного визначення координат *недоступної точки* при заданому розташуванні геодезичного обладнання.
2. Розробити *оптимізаційну аналітичну модель* визначення області значень параметрів *недоступної точки* відповідно до запропонованої *геометричної моделі*.
3. Експериментально перевірити запропонований підхід на реальному історичному *об'єкті*.

Основна частина. У запропонованому *оптимізаційному підході* розроблено тривимірну *геометричну модель* (рис. 1), в якій візирні промені AD та BE в загальному випадку не перетинаються, а є *мимобіжними*. Це відповідає реальній ситуації через неминучі похибки вимірювань.

Координати x_{CD}, y_{CD}, z_{CD} , будь-якої точки $C_D(x_{CD}, y_{CD}, z_{CD})$ на промені AD описуються параметричною системою:

$$\begin{cases} x_{CD} = r_{Dx} \cdot t_{CD} + x_D \\ y_{CD} = r_{Dy} \cdot t_{CD} + y_D \\ z_{CD} = r_{Dz} \cdot t_{CD} + z_D \end{cases} \quad (1)$$

де t_{CD} – параметр положення точки на промені t_D , визначаючого положення будь-якої точки C_D на промені AD .

Координати x_{CE}, y_{CE}, z_{CE} будь-якої точки $C_E(x_{CE}, y_{CE}, z_{CE})$ промені BE можна описати системою:

$$\begin{cases} x_{CE} = r_{Ex} \cdot t_{CE} + x_E \\ y_{CE} = r_{Ey} \cdot t_{CE} + y_E \\ z_{CE} = r_{Ez} \cdot t_{CE} + z_E \end{cases} \quad (2)$$

де t_{CE} - параметр положення точки на промені t_E , визначаючого положення будь-якої точки C_E на промені BE .

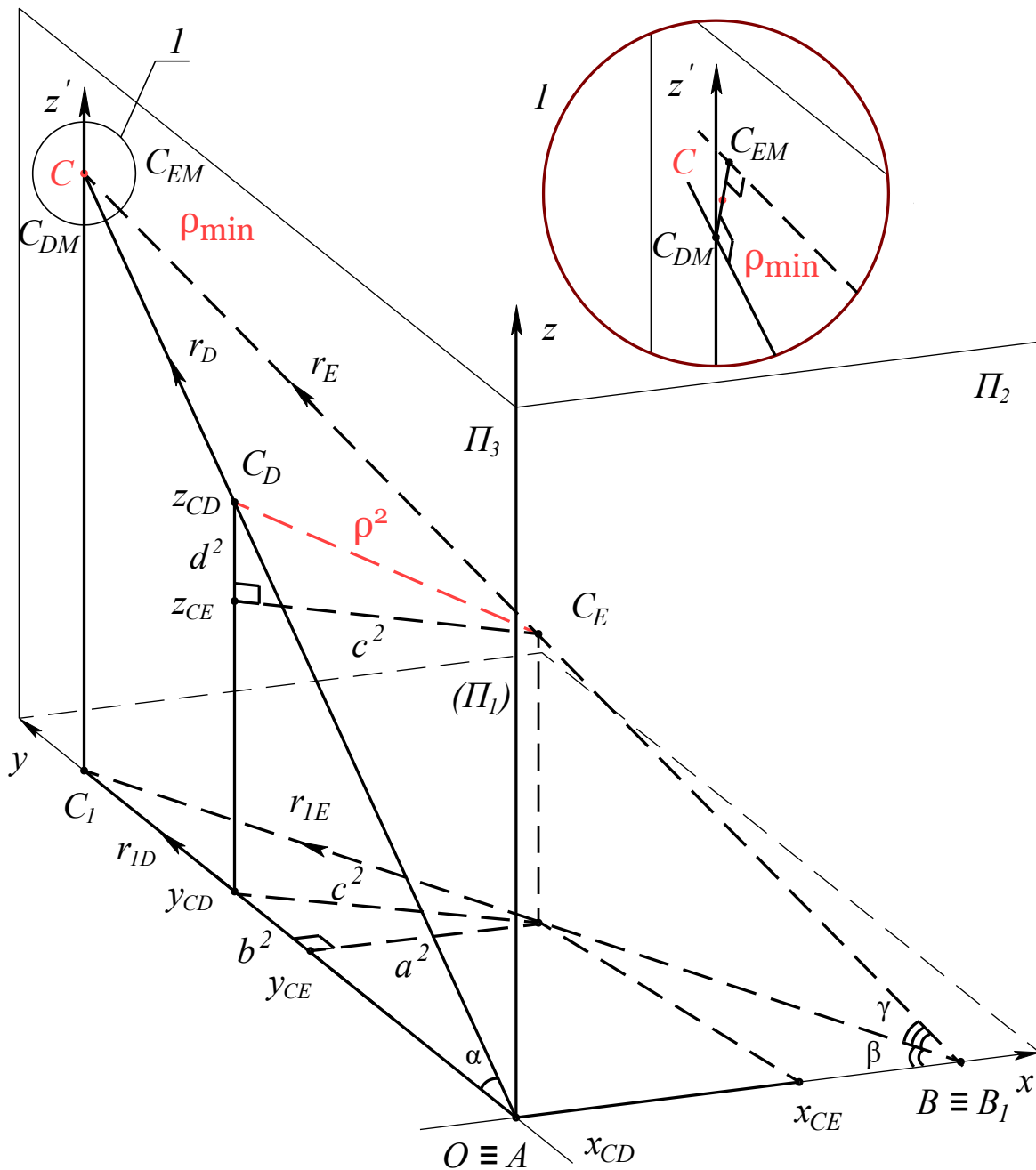


Рис. 1. Геометрична модель відстані між двома точками C_D, C_E променів AD і BE .

Квадрат відстані $[\rho(C_D, C_E)]^2$ між довільними точками $C_D(x_{CD}, y_{CD}, z_{CD}), C_E(x_{CE}, y_{CE}, z_{CE})$ на різних променях AD, BE має вигляд:

$$f = [\rho(C_D, C_E)]^2 = (x_{CD} - x_{CE})^2 + (y_{CD} - y_{CE})^2 + (z_{CD} - z_{CE})^2 \quad (3)$$

Знаходимо відстань між двома будь-якими точками C_D і C_E двох різних візирних променів в параметричній формі, підставляючи в (3) значення координат цих точок з системи рівнянь (1) і (2):

$$\begin{aligned}\bar{f} &= [\rho(C_D, C_E)]^2 = (x_{CD} - x_{CE})^2 + (y_{CD} - y_{CE})^2 + (z_{CD} - z_{CE})^2 = \\ &= (r_{Dx} \cdot t_{CD} + x_D - r_{Ex} \cdot t_{CE} - x_E)^2 + (r_{Dy} \cdot t_{CD} + y_D - r_{Ey} \cdot t_{CE} - y_E)^2 + \\ &+ (r_{Dz} \cdot t_{CD} + z_D - r_{Ez} \cdot t_{CE} - z_E)^2\end{aligned}\quad (4)$$

Задача визначення координат *недоступної точки С* зводиться до знаходження мінімуму цієї функції — тобто до визначення найкоротшої відстані між двома *мимобіжними* прямими.

$$\bar{f} = [\rho(C_D, C_E)]^2 = f(t_{CD}, t_{CE}) \rightarrow \min. \quad (5)$$

З виразів (4) та (5) видно, що відстань $\rho(C_D, C_E)$ між двома будь-якими точками C_D і C_E двох різних візирних променів AD та BE є функція від двох змінних $f(t_{CD}, t_{CE})$. Такими змінними є параметри t_{CD} та t_{CE} двох променів AD та BE відповідно. Отже, задача зводиться до визначення таких значень параметрів t_{CD} і t_{CE} , за яких відстань ρ (4) між двома візирними променями мінімальна ρ_{min} . Причому, завдання має єдине рішення, якщо візирні промені не паралельні.

Пошук екстремуму функції відстані (4) між двома візирними променями, і саме мінімуму, має реальну *геометричну* інтерпретацію.

Згідно з теорією функцій кількох змінних [8] відомо, що функція $f(t_{CD}, t_{CE})$ досягає свого екстремуму, коли її часткові похідні за кожною змінною дорівнюють нулю. Отже, для визначення значень параметрів t_{CD} і t_{CE} , при яких відстань між *мимобіжними візирними променями* мінімальна, необхідно вирішити систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{df(t_{CD}, t_{CE})}{dt_{CD}} = 0 \\ \frac{df(t_{CD}, t_{CE})}{dt_{CE}} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Після диференціювання функцію відстані (4) по змінним t_{CD} і t_{CE} , систему рівнянь (6) представимо у вигляді (7):

$$\begin{cases} 2(r_{Dx} \cdot t_{CD} + x_D - r_{Ex} \cdot t_{CE} - x_E) \cdot r_{Dx} + \\ + 2(r_{Dy} \cdot t_{CD} + y_D - r_{Ey} \cdot t_{CE} - y_E) \cdot r_{Dy} + \\ + 2(r_{Dz} \cdot t_{CD} + z_D - r_{Ez} \cdot t_{CE} - z_E) \cdot r_{Dz} = 0 \\ 2(r_{Dx} \cdot t_{CD} + x_D - r_{Ex} \cdot t_{CE} - x_E) \cdot (-r_{Ex}) + \\ + 2(r_{Dy} \cdot t_{CD} + y_D - r_{Ey} \cdot t_{CE} - y_E) \cdot (-r_{Ey}) + \\ + 2(r_{Dz} \cdot t_{CD} + z_D - r_{Ez} \cdot t_{CE} - z_E) \cdot (-r_{Ez}) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Розділивши кожне з рівнянь системи (7) на два і згрупувавши члени зі змінними t_{CD} і t_{CE} , отримуємо систему з двох лінійних рівнянь (8):

$$\begin{cases} (r_{Dx}^2 + r_{Dy}^2 + r_{Dz}^2) \cdot t_{DC} - (r_{Ex} \cdot r_{Dx} + r_{Ey} \cdot r_{Dy} + r_{Ez} \cdot r_{Dz}) \cdot t_{CE} = \\ = -[(x_D - x_E) \cdot r_{Dx} + (y_D - y_E) \cdot r_{Dy} + (z_D - z_E) \cdot r_{Dz}] \\ - (r_{Dx} \cdot r_{Ex} + r_{Dy} \cdot r_{Ey} + r_{Dz} \cdot r_{Ez}) \cdot t_{CD} + (r_{Ex}^2 + r_{Ey}^2 + r_{Ez}^2) \cdot t_{CE} = \\ = (x_D - x_E) \cdot r_{Ex} + (y_D - y_E) \cdot r_{Ey} + (z_D - z_E) \cdot r_{Ez} \end{cases} \quad (8)$$

Після диференціювання та алгебраїчних перетворень отримуємо систему двох лінійних рівнянь. Запишемо систему лінійних рівнянь (8) у класичному вигляді (9) для застосування формул Крамера [8]:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot t_{CD} + a_{12} \cdot t_{CE} = C_1 \\ a_{21} \cdot t_{CD} + a_{22} \cdot t_{CE} = C_2 \end{cases} \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} a_{11} &= (r_{Dx}^2 + r_{Dy}^2 + r_{Dz}^2), \quad a_{22} = (r_{Ex}^2 + r_{Ey}^2 + r_{Ez}^2), \\ a_{12} &= a_{21} = -(r_{Ex} \cdot r_{Dx} + r_{Ey} \cdot r_{Dy} + r_{Ez} \cdot r_{Dz}), \\ C_1 &= -[(x_D - x_E) \cdot r_{Dx} + (y_D - y_E) \cdot r_{Dy} + (z_D - z_E) \cdot r_{Dz}], \\ C_2 &= [(x_D - x_E) \cdot r_{Ex} + (y_D - y_E) \cdot r_{Ey} + (z_D - z_E) \cdot r_{Ez}]. \end{aligned}$$

Розв'язуючи формули Крамера [8] для вирішення системи лінійних рівнянь (8), представлених у вигляді системи (9), мають вигляд (10):

$$t_{CD} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad t_{CE} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}, \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} C_1 & a_{12} \\ C_2 & a_{22} \end{vmatrix} = C_1 \cdot a_{22} - a_{12} \cdot C_2, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & C_1 \\ a_{21} & C_2 \end{vmatrix} = C_2 \cdot a_{11} - a_{21} \cdot C_1. \end{aligned}$$

Значення параметрів t_{CD} і t_{CE} , отримані за формулами (10), є значеннями параметрів t_{DM} і t_{EM} , при яких відстань між *мимобіжними променями AD і BE* (Рис. 1) мінімальна:

$$t_{DM} = t_{CD} \quad \text{і} \quad t_{EM} = t_{CE} \quad (11)$$

Координати x_{DM}, y_{DM}, z_{DM} (12), x_{EM}, y_{EM}, z_{EM} (13) точок $C_{DM}(x_{DM}, y_{DM}, z_{DM}), C_{EM}(x_{EM}, y_{EM}, z_{EM})$, для яких відстань $\rho(C_{DM}, C_{EM})$ між двома *мимобіжними променями AD і BE* мінімальна ρ_{min} , виходять підстановкою значень виразів (11) у системи рівнянь (1) та (2) відповідно:

$$\begin{cases} x_{DM} = r_{Dx} \cdot t_{DM} + x_D \\ y_{DM} = r_{Dy} \cdot t_{DM} + y_D \\ z_{DM} = r_{Dz} \cdot t_{DM} + z_D \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} x_{EM} = r_{Ex} \cdot t_{EM} + x_E \\ y_{EM} = r_{Ey} \cdot t_{EM} + y_E \\ z_{EM} = r_{Ez} \cdot t_{EM} + z_E \end{cases} \quad (13)$$

Точки $C_{DM}(x_{DM}, y_{DM}, z_{DM})$, $C_{EM}(x_{EM}, y_{EM}, z_{EM})$ є граничними точками відрізка $[C_{DM}, C_{EM}]$ з мінімальною відстанню між *мимобіжними візирними променями* AD і BE (Рис. 1).

Шукана точка $C(x_C, y_C, z_C)$ може, наприклад, розташовуватись в середині мінімального відрізка $[C_{DM}, C_{EM}]$. Тоді формули для розрахунку координат x_C, y_C, z_C такої "єдиної" точки мають вигляд:

$$x_C = (x_{DM} + x_{EM})/2, \quad (14)$$

$$y_C = (y_{DM} + y_{EM})/2, \quad (15)$$

$$z_C = (z_{DM} + z_{EM})/2. \quad (16)$$

Для розробленої *геометричної моделі* вимірювань (Рис. 1) координату x_C точки C доцільно приймати рівною нулю ($x_C=0$), оскільки візирний промінь AD належить площині ADC .

Усі точки площини ADC із візирним променем AD мають координату абсцис зі значенням нуль.

Експериментальна перевірка. Запропонований підхід перевірено при реконструкції "Будинку Руссова" в Одесі (Рис. 2) — пам'ятки архітектури, що належить до історичної зони.

Визначались координати найвищої точки шпиля на даху відносно рівня землі.

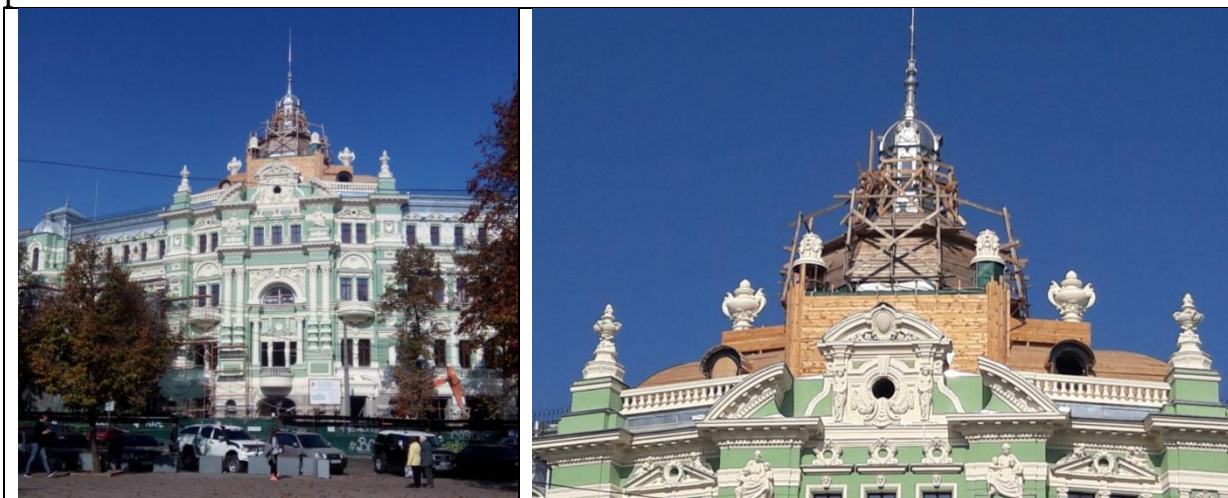


Рис. 2. Фасад "Будинку Руссова" в місті Одесі, Україна

З прямих вимірювань чотирьох параметрів та даних розробленої *геометричної моделі* отримали значення координат чотирьох вихідних точок. Координати цих чотирьох точок є вихідними даними для вирішення поставленого завдання.

Відповідно до запропонованої *геометричної моделі* (Рис. 1) експериментально теодолітом ЗТ5КП (№71923А) виміряні кути $\alpha=21,18^\circ$, $\beta=63,9^\circ$, $\gamma=19,97^\circ$ і відстань між точками A і B – $AB=45600$ мм.

Відстань між точками A і D_I приймається рівною 10000 мм і між точками B і E_I 15000 мм — $y_D=AD_I=10000$ мм, $BE_I=15000$ мм.

Відповідно до розробленої тривимірної *геометричної моделі* вимірювань (Рис. 1) всі три координати точки A дорівнюють нулю — $x_A=0$, $y_A=0$, $z_A=0$.

Координати y_B і z_B точки B і координата x_D точки D також дорівнюють нулю – $y_B=0$, $z_B=0$, $x_D=0$. Координата z_D точки D і координати y_E , z_E і x_E точки E розраховуються за формулами –
 $z_D=|AD_I| \cdot \operatorname{tg}\alpha=10000 \cdot 0,3875=3875$ мм;
 $y_E=|BE_I| \cdot \sin\beta=15000 \cdot 0,8985=13470$ мм;
 $z_E=|BE_I| \cdot \operatorname{tg}\gamma=15000 \cdot 0,3634=5451$ мм;
 $x_E=|AB|-|BE_I| \cdot \cos\beta=45600-15000 \cdot 0,4399=39002$ мм.

На підставі отриманих координат всіх чотирьох вихідних точок $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $D(x_D, y_D, z_D)$, $E(x_E, y_E, z_E)$ вирішується задача визначення мінімальної відстані між *мимобіжними візирними променями* AD і BE (Рис. 1). Розраховуються координати $x_{DM}, y_{DM}, z_{DM}, x_{EM}, y_{EM}, z_{EM}$ точок $C_{DM}(x_{DM}, y_{DM}, z_{DM})$, $C_{EM}(x_{EM}, y_{EM}, z_{EM})$, для яких відстань $\rho(C_{DM}, C_{EM})$ між двома *мимобіжними променями* AD і BE мінімально ρ_{\min} – $x_{DM}=0$ мм; $x_{EM}=0$ мм; $y_{DM}=93525$ мм; $y_{EM}=92987$ мм; $z_{DM}=36241$ мм; $z_{EM}=37630$ мм.

Точка $C(x_C, y_C, z_C)$ що шукається, розташовується в середині мінімального відрізка $[C_{DM}, C_{EM}]$. Тому її координати легко розраховуються $x_C=0$ мм, $y_C=93256$ мм, $z_C=36935$ мм.

Абсолютна похибка розрахунків за кожною з координат складає – $\Delta x=0$ мм, $\Delta y=269$ мм, $\Delta z=694$ мм. Відносна похибка розв'язання екстремальної задачі дорівнює $\Sigma_x=0$ %, $\Sigma_y=0,29$ %, $\Sigma_z=1,88$ %.

Обговорення результатів

Запропонований оптимізаційний підхід має низку переваг:

універсальність – працює з будь-яким оптичним обладнанням (теодоліти, тахеометри), без потреби в дорогих лазерних сканерах;

однозначність – забезпечує єдиний розв'язок на відміну від класичної моделі (18 варіантів);

стійкість – малі похибки вимірювань не призводять до катастрофічних змін результату;

адаптивність – закладена можливість керування похибкою шляхом зміни кутових параметрів.

Порівняно з методами лазерного сканування (з точністю до 1 см), запропонований підхід поступається в абсолютній точності, але виграє

в доступності, оперативності та простоті – він не потребує спеціального програмного забезпечення для постобробки «хмар точок» і може використовуватися безпосередньо на будівельному майданчику з мобільних пристроїв.

Розроблені моделі є теоретичним підґрунтям для впровадження **ВІМ-технологій** та **параметричного нормування** в Україні [9] (Зелена книга, 2020). *ВІМ-модель* потребує автоматизованого наповнення параметрами елементів споруди, і запропонований апарат дозволяє отримувати ці параметри за непрямыми даними з гарантованою однозначністю.

Висновки. 1. Розроблено тривимірну *геометричну модель з мимобіжними візирними променями*, яка адекватно описує реальну ситуацію вимірювань (наявність похибок, дробові значення параметрів).

2. Побудовано *оптимізаційну аналітичну модель*, що зводить задачу до пошуку мінімуму квадрата відстані між двома прямими, та доведено її коректність (існування, єдиність, стійкість).

3. Експериментально на реальному об'єкті (Будинок Руссова) підтверджено працездатність підходу; отримана відносна похибка не перевищує 2 %, що є прийнятним для будівельної практики.

4. Показано, що запропонований підхід є економічно доцільним, оскільки дозволяє використовувати доступне оптичне обладнання замість дорогих лазерних сканерів.

Перспективи подальших досліджень. Полягають у розробці комбінованої *геометричної моделі* для випадків, коли об'єкт перетинає нульову горизонтальну площину (верхня + нижня модель); адаптації алгоритму для роботи з даними безпілотних літальних апаратів (дронів) та мобільних пристроїв (iPhone з LiDAR); інтеграції розробленого математичного апарату в існуючі *CAD/ВІМ-системи* у вигляді програмних модулів; підготовці пропозицій щодо внесення змін до ДБН у частині методів геодезичного контролю для *параметричного нормування*.

Література

1. Михайленко В. Є., Найдих В. М., Подкоритов А. М., Скидан І. А. Інженерна та комп'ютерна графіка. Київ: Вища школа, 2001. 350 с.
2. Браїлов О. Ю. Інженерна геометрія. Київ: Каравелла, 2013. 456 с.
3. Ванін В. В., Бліок А. В., Гнітецька Г. О. Оформлення конструкторської документації. Київ: Каравела, 2012. 200 с
4. Войтенко С. П., Юрковський Р. Г., Вільданова Н. Р., Малина І. А. Основи інженерної геодезії. Одеса: ОДАБА, 2014. 217 с.
5. Кузнецов А. О. Сучасні системи мобільного лазерного сканування та особливості їх застосування на автомобільних дорогах. *Дороги і мости*. 2019. №42. С. 56–76
6. Шульц Р. В. Наземне лазерне сканування в задачах інженерної геодезії: дис. ... д-ра техн. наук: 05.24.01. Київ: КНУБА, 2012. 372 с.

7. Дубовой В. М., Кветний Р. Н., Михальов О. І., Усов А. В. Моделювання та оптимізація систем. Вінниця: ПП «ТД «Едельвейс», 2017. 804 с.
8. Григорків В. С., Григорків М. В. Вища математика. Чернівці: Чернівецький національний університет, 2011. 280 с.
9. Д. Барзилович, І. Лагунова, І. Бардасова та ін. Зелена книга. Системний перегляд ефективності державного регулювання. Параметричне нормування у будівництві. Київ, 2020. 92 с.
10. Браїлов О. Ю., Панченко В. І. Аналітичне обґрунтування геометричної моделі вимірювань параметрів недоступної точки об'єкта. *Вісник Херсонського національного технічного університету*. 2019. Вип. 2(69). Ч. 3. С. 237–243.
11. Браїлов О. Ю., Панченко В. І. Алгоритм розрахунку параметрів недоступної точки об'єкта. *Сучасні проблеми моделювання*. Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2019. Вип. 16. С. 39–49

References

1. Mykhailenko V. Ye., Naidysh V. M., Podkorytov A. M., Skydan I. A. (2001). *Inzhenerna ta kompiuterna hrafika*. Kyiv: Vyscha shkola. 350 p. {in Ukrainian}
2. Brailov O. Yu. (2013). *Inzhenerna heometriia*. Kyiv: Karavella. 456 p. {in Ukrainian}.
3. Vanin V. V., Bliok A. V., Hnitetska H. O. (2012). *Oformlennia konstruktorskoï dokumentatsii*. Kyiv: Karavela. 200 p. {in Ukrainian}
4. Voitenko S. P., Yurkovskiy R. H., Vildanova N. R., Malyna I. A. (2014). *Osnovy inzhenernoi heodezii*. Odesa: ODABA. 217 p. {in Ukrainian}
5. Kuznetsov A. O. (2019). Suchasni systemy mobilnoho lazernoho skanuvannia ta osoblyvosti yikh zastosuvannia na avtomobilnykh dorohakh. *Dorohy i mosty*, 42, 56–76. {in Ukrainian}
6. Shults R. V. (2012). *Nazemne lazerne skanuvannia v zadachakh inzhenernoi heodezii*. Doctor's thesis. Kyiv: KNUBA. 372 p. {in Ukrainian}.
7. Dubovyi V. M., Kvetnyi R. N., Mykhalov O. I., Usov A. V. (2017). *Modeliuvannia ta optymizatsiia system*. Vinnytsia: PP «TD «Edelweis». 804 p. {in Ukrainian}
8. Hryhorkiv V. S., Hryhorkiv M. V. (2011). *Vyshcha matematyka*. Chernivtsi: Chernivetskyi natsionalnyi universytet. 280 p. {in Ukrainian}
9. Barzylovich D., Lahunova I., Bardasova I. et al. (2020). *Zelena knyha. Systemnyi perehliad efektyvnosti derzhavnogo rehuliuвання. Parametrychne normuvannia u budivnytstvi*. Kyiv. 92 p. {in Ukrainian}
10. Brailov O. Yu., Panchenko V. I. (2019). Analitichne obgruntuvannia geometrychnoi modeli vymiriuvan parametriv nedostupnoi tochky obiekta. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu*, 2(69)/3, 237–243. {in Ukrainian}
11. Brailov O. Yu., Panchenko V. I. (2019). Alhorytm rozrakhunku parametriv nedostupnoi tochky obiekta. *Suchasni problemy modeliuvannia*, 16, 39–49. {in Ukrainian}
12. Brailov A. Yu., Panchenko V. I. (2021). Determination of Parameters of an Inaccessible Point of an Object. *Proceedings of the Nineteenth International*

Conference on Geometry and Graphics (ICGG-2020, São Paulo, Brazil). Springer, Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 1296, pp. 911–915. DOI: 10.1007/978-3-030-63403-2_83. {in English}

Lecturer of the First Category **Vitaliy Panchenko**,
gb126t@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5939-832X
Separate Structural Subdivision
«Odesa Professional College of Computer Technologies of
Odesa I. I. Mechnikov National University»

GEOMETRIC MODELING AND OPTIMIZATION APPROACH FOR DETERMINING THE PARAMETERS OF AN INACCESSIBLE POINT OF A CONSTRUCTION OBJECT

The article presents an optimization approach to determining the parameters of an inaccessible point of a construction object based on a three-dimensional geometric model with crossed directional rays. The main scientific problem is identified – the objective contradiction between the need to obtain a unique and stable geometric solution and the impossibility of providing it within the classical model with intersecting rays, which, under real measurement errors, yields up to 18 variants of coordinates. A transition from searching for the intersection point of rays to the problem of finding the minimum distance between crossed rays is proposed, ensuring the correctness (existence, uniqueness, stability) of the solution. An analytical justification is provided: the squared distance between points on different rays is a function of two variables, whose minimum is found by solving a system of differential equations using Cramer's rule. Experimental verification is carried out on a real object – the Russov House in Odesa (a historical landmark). Using a theodolite, the angles $\alpha=21.18^\circ$, $\beta=63.9^\circ$, $\gamma=19.97^\circ$ and the base $AB=45600$ mm are measured. The boundary points of the minimum distance and the coordinates of the desired point are calculated: $x=0$ mm, $y=93256$ mm, $z=36935$ mm. The absolute errors are $\Delta y=269$ mm, $\Delta z=694$ mm; the relative errors are 0.29% and 1.88% respectively, which is acceptable for construction practice. The proposed approach has the following advantages: versatility (works with any optical equipment), uniqueness (a single solution instead of 18 variants), stability (small measurement errors do not lead to catastrophic changes), and adaptability (ability to control the error by changing angular parameters). The results create a theoretical foundation for the implementation of BIM technologies and parametric standardization in Ukraine in accordance with the «Green Book» (2020). The developed models can be integrated into CAD/BIM systems and used for rapid geodetic surveys of cultural heritage objects, particularly in the historical center of Odesa (UNESCO zone). Further research includes the development of a combined geometric model for objects crossing the zero horizontal plane and adaptation of the algorithm for data from unmanned aerial vehicles (drones).

Keywords: construction object; inaccessible point; crossed directional rays; optimization model; geometric modeling; BIM; parametric standardization.