УДК 519.62
DOI: 10.32347/0131-579x.2026.110.247-254

Ph. D. **Печук В.Д.**
pechuk.vd@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9360-8522
Київський національний університет будівництва та архітектури
к. ф.-м. н. **Печук Є.Д.**
evgdmp@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1028-1390

Інститут гідромеханіки НАНУ

НОВИЙ МЕТОД ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Системи лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних є основою математичного моделювання багатьох реальних процесів. Оскільки для таких систем одержання аналітичних розв'язків задач Коші чи крайових задач здебільшого є неможливим, виникає потреба в інших підходах. Тому для розв'язку даних систем на практиці використовують наближені, чисельні методи. У роботі запропоновано новий алгоритм для моделювання лінійних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних, що не потребує введення гладких базисних функцій і розгляду Гілбертових просторів, на відміну від проекційних методів типу Бубнова-Галеркіна та інших. Цей новий чисельний метод може бути простою альтернативою існуючим методам інтегрування рівнянь в частинних похідних, що значно спрощує процес моделювання, без втрати в точності отриманих результатів. Розглядаються лінійні системи диференціальних рівнянь в частинних похідних, які є математичними моделями багатьох технічних процесів. Побудовано новий чисельний алгоритм для моделювання даних систем. Новий алгоритм розроблено на основі зведення лінійних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних до узагальненої форми Коші, для систем диференціальних рівнянь в частинних похідних, і чисельного інтегрування отриманої системи. Даний метод займає проміжне місце між проєкційно-сітковими методами та методом інтегральних тотожностей. У найпростішому варіанті наближення отримується простими функціями. Метод інтегральних тотожностей та різницеві методи виступають частинними випадками даного методу.

Ключові слова: *системи диференціальних рівнянь в частинних похідних; чисельні методи; математичне моделювання; проєкційно-сіткові методи.*

Постановка проблеми. Математичні моделі багатьох процесів та явищ часто описуються системами лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних. В більшості випадків розв'язок задач Коші, або крайових задач для даних систем не може бути знайдений аналітично. Тому для розв'язку даних систем на практиці використовують наближені, чисельні методи. Серед них найчастіше це проекційні методи та їх частинні випадки – проєкційно-сіткові методи, варіаційні методи та сіткові методи. Дані методи тісно пов'язані між собою і мають кожні свої переваги і недоліки. Тому розробка нових алгоритмів для моделювання систем лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних є актуальним завданням.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Класичні проєкційно-сіткові методи типу Бубнова-Галеркіна та інших, а також метод скінчених елементів, описані, наприклад, в роботах [1-5]. На даний момент дані методи є найбільш актуальними для комп'ютерного моделювання лінійних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних. Всі ці методи, на відміну від запропонованого в цій статті, вимагають розгляду досить гладких базисних функцій, що ускладнює розв'язок та написання відповідних комп'ютерних програм. Також розгляд цих методів необхідно проводити в рамках функціонального аналізу, що вимагає високого рівня математичного апарату. Запропонований нами метод не виходить за межі математичного аналізу та звичайних чисельних методів.

Ціль статті. Запропонувати новий алгоритм для моделювання лінійних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних, що не потребує введення гладких базисних функцій і розгляду Гілбертових просторів, на відміну від проекційних методів типу Бубнова-Галеркіна та інших. Цей новий чисельний метод може бути простою альтернативою існуючим методам інтегрування рівнянь в частинних похідних, що значно спрощує процес моделювання, без втрати в точності отриманих результатів.

Основна частина

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних:

$$\mathcal{L}u = f, \tag{1}$$

тут $u: \Omega^n \to \mathbb{R}^m$ – невідомі функції, $f: \Omega^n \to \mathbb{R}^m$ – задані функції, $\Omega^n \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}$ – лінійний диференціальний оператор порядку α, $\mathcal{L}: \mathbb{C}_\alpha^m(\Omega^n) \to \mathbb{C}^m(\Omega^n)$.

Система (1) має m рівнянь, m невідомих функцій, n змінних. За теоремою Ковалевської існує єдиний розв'язок відповідної задачі Коші [6-8]. Заміною похідних в (1) на нові невідомі функції систему (1) можна переписати в узагальненій формі Коші:

$$\mathcal{M}v = g - \text{Å}v, \tag{2}$$

де $v\colon \Omega^n \to \mathbb{R}^l$ – нові невідомі функції, перші m з яких співпадають з u,

$m \leq l, g\colon \Omega^n \to \mathbb{R}^l$ – задані функції, $\mathcal{M}$ – диференціальний оператор 1-го порядку, $\mathcal{M}\colon \mathbb{C}_1^l(\Omega^n) \to \mathbb{C}^l(\Omega^n)$, $v = (v_1, \dots, v_l) = v(x) = v(x_1, \dots, x_n) = \left(v_1(x_1, \dots, x_n), \dots, v_l(x_1, \dots, x_n)\right)$, а $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$\mathcal{M}v = \left(\frac{\partial v_{i_1}(x)}{\partial x_{j_1}}, \dots, \frac{\partial v_{i_l}(x)}{\partial x_{j_l}}\right), \tag{3}$$

де $\{i_1, \dots, i_l\} \epsilon (1, \dots, l)$, а $\{j_1, \dots, j_l\} \epsilon (1, \dots, n)$,

$\mathring{A}\colon \mathbb{C}^l(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}^l(\mathbb{R}^n)$ – лінійний оператор, $\mathring{A} = \left(a_{ij}(x)\right)_{i,j=1}^{l}$, $a_{ij}(x)$ – задані неперервні функції, $i, j = 1, \dots, l$. Тому

$$\mathring{A}v = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{l} a_{1j}(x)v_j(x) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{l} a_{lj}(x)v_j(x) \end{pmatrix}.$$

(2) можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_{i_1}(x)}{\partial x_{j_1}} = g_1(x) - \sum_{j=1}^{l} a_{1j}(x)v_j(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial v_{i_l}(x)}{\partial x_{j_l}} = g_l(x) - \sum_{j=1}^{l} a_{lj}(x)v_j(x) \end{cases}, \tag{4}$$

де $\{i_1, \dots, i_l\} \epsilon (1, \dots, l)$, $\{j_1, \dots, j_l\} \epsilon (1, \dots, n)$.

Інтегруючи рівняння (4) від $x_{j_1}^0$ до x_{j_1}, …, від $x_{j_l}^0$ до x_{j_l} по $\left(dx_{j_1}, \dots, dx_{j_l}\right)$ відповідно, за початкових (крайових) умов $x^0 = (x_1^0, \dots, x_l^0)$, отримаємо:

$$\begin{cases} v_{i_1}(x) = v_{i_1}(x)_{|x_{j_1} = x_{j_1}^0} + \int_{x_{j_1}^0}^{x_{j_1}} g_1(x)dx_{j_1} - \sum_{j=1}^{l} \int_{x_{j_1}^0}^{x_{j_1}} a_{1j}(x)v_j(x)dx_{j_1} \\ \vdots \\ v_{i_l}(x) = v_{i_l}(x)\big|_{x_{j_l} = x_{j_l}^0} + \int_{x_{j_l}^0}^{x_{j_l}} g_l(x)dx_{j_l} - \sum_{j=1}^{l} \int_{x_{j_l}^0}^{x_{j_l}} a_{lj}(x)v_j(x)dx_{j_l} \end{cases}, \tag{5}$$

де $\{i_1, \dots, i_l\} \epsilon (1, \dots, l)$, $\{j_1, \dots, j_l\} \epsilon (1, \dots, n)$.

Розглянемо наближення v простими функціями. Розіб'ємо Ω^n гіперплощинами

$$x_i^j = x_i^0 + jh, \tag{6}$$

де $i = 1, \dots, n,\ j = 0, \dots, k, n > 0$.

$$\Omega_{s_1,\dots,s_n} = \{x | x_i \in [x_i^{s_i}, x_i^{s_i+1}), i = 1, \dots, n\} \tag{7}$$

$$v \cong \sum_{s_1,\dots,s_n=0}^{k-1} v^{s_1,\dots,s_n} \mathbb{I}(\Omega_{s_1,\dots,s_n}), \tag{8}$$

де

$$v^{s_1,\dots,s_n} = v(x_{s_1}, \dots, x_{s_n}), \tag{9}$$

$s_1, \dots, s_n = 0, \dots, k-1$, а $\mathbb{I}(\Omega) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}$.

Підставляючи (8) в (5) маємо систему для знаходження значень (9):

$$\begin{cases} v_{i_1}^{s_1,\dots,s_n} = v_{i_1}^{s_1,\dots,s_{j_1-1},0,s_{j_1+1},\dots,s_n} + \int\limits_{x_{j_1}^0}^{x_{j_1}^{s_{j_1}}} g_1 dx_{j_1} - \sum\limits_{j=1}^{l} \sum\limits_{p=0}^{s_{j_1}-1} v_j^{s_1,\dots,s_{j_1-1},p,s_{j_1+1},\dots,s_n} \int\limits_{x_{j_1}^p}^{x_{j_1}^{p+1}} a_{1j} dx_{j_1} \\ \vdots \\ v_{i_l}^{s_1,\dots,s_n} = v_{i_1}^{s_1,\dots,s_{j_l-1},0,s_{j_l+1},\dots,s_n} + \int\limits_{x_{j_l}^0}^{x_{j_l}^{s_{j_l}}} g_l dx_{j_l} - \sum\limits_{j=1}^{l} \sum\limits_{p=0}^{s_{j_l}-1} v_j^{s_1,\dots,s_{j_l-1},p,s_{j_l+1},\dots,s_n} \int\limits_{x_{j_l}^p}^{x_{j_l}^{p+1}} a_{lj} dx_{j_l} \end{cases}, \tag{10}$$

де $\{i_1, \dots, i_l\} \epsilon (1, \dots, l)$, $\{j_1, \dots, j_l\} \epsilon (1, \dots, n)$, $s_1, \dots, s_n = 1, \dots, k-1$.

Отримано систему (10) з $l \times (k-1)^2$ рівнянь та $l \times (k-1)^2$ невідомих $v_i^{s_1,\dots,s_n}$, $i = 1, \dots, l$, $s_1, \dots, s_n = 1, \dots, k$. Значення $v_i^{s_1,\dots,s_n}$, при $s_j = 0$ беруться з початкових (крайових) умов. Система має під діагональний вигляд, з одиницями по головній діагоналі. Тому є невиродженою і має єдиний розв'язок. У випадку задачі Коші розв'язок знаходиться рекурентно. У випадку коли крайові умови задані на різних кінцях Ω система потребує розв'язку.

Приклад 1. Застосуємо метод (5) – (10) до звичайного диференціального рівняння:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + \mathrm{u} = \mathrm{f}, \tag{11}$$

де $x \in [x_0, x_N]$, $u \in \mathbb{C}_2([x_0, x_N])$. Перепишемо (11) у формі Коші (2)

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = v \\ \dfrac{dv}{dx} = f - v - u \end{cases} \tag{12}$$

і проінтегруємо від x_0 до x по dx:

$$\begin{cases} u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^{x} v(x)dx \\ v(x) = v(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x)dx - \int_{x_0}^{x} v(x)dx - \int_{x_0}^{x} u(x)dx \end{cases}. \quad (13)$$

Запишемо наближення простими функціями (8):

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0, & x \notin [x_i, x_{i+1}) \end{cases}, x_{i+1} - x_i = h, i = 0, \dots, N-2,$$

$$\varphi_{N-1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [x_{N-1}, x_N) \\ 0, & x \notin [x_{N-1}, x_N) \end{cases}, \text{ маємо}$$

$$u \cong \sum_{i=0}^{N-1} u_i \varphi_i, v \cong \sum_{i=0}^{N-1} v_i \varphi_i, u_i = u(x_i), v_i = v(x_i), \quad (14)$$

де $i = 0, \dots, N$. Підставляючи (14) в (13) отримаємо:

$$\begin{cases} u_j = u_0 + \sum_{i=0}^{j-1} v_i h \\ v_j = v_0 + \int_{x_0}^{x_j} f dx - \sum_{i=0}^{j-1} v_i h - \sum_{i=0}^{j-1} u_i h \end{cases}, \quad (15)$$

де $j = 1, \dots, N$, або

$$\begin{cases} \frac{u_j - u_0}{h} = \sum_{i=0}^{j-1} v_i \\ \frac{v_j - v_0}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_j} f dx - \sum_{i=0}^{j-1} v_i - \sum_{i=0}^{j-1} u_i \end{cases}, \quad (16)$$

де $j = 1, \dots, N$.

Зауваження. Якщо в системі (4) провести інтегрування по вузлам розбиття (6), то отримаємо метод інтегральних тотожностей [5]. Якщо потім скористатися наближенням (8), то отримаємо стандартний різницевий метод:

$$\begin{cases} v_{i_1}^{s_1,\dots,s_n} = v_{i_1}^{s_1,\dots,s_{j_1}-1,\dots,s_n} + \int\limits_{x_{j_1}^{s_{j_1}-1}}^{x_{j_1}^{s_{j_1}}} g_1 dx_{j_1} - \sum\limits_{j=1}^{l} v_j^{s_1,\dots,s_{j_1}-1,\dots,s_n} \int\limits_{x_{j_1}^{s_{j_1}-1}}^{x_{j_1}^{s_{j_1}}} a_{1j} dx_{j_1} \\ \vdots \\ v_{i_l}^{s_1,\dots,s_n} = v_{i_1}^{s_1,\dots,s_{j_l}-1,\dots,s_n} + \int\limits_{x_{j_l}^{s_{j_l}-1}}^{x_{j_l}^{s_{j_l}}} g_l dx_{j_l} - \sum\limits_{j=1}^{l} v_j^{s_1,\dots,s_{j_l}-1,\dots,s_n} \int\limits_{x_{j_l}^{s_{j_l}-1}}^{x_{j_l}^{s_{j_l}}} a_{lj} dx_{j_l} \end{cases}, (17)$$

де $\{i_1, \dots, i_l\} \epsilon (1, \dots, l), \{j_1, \dots, j_l\} \epsilon (1, \dots, n)$.

Приклад 2. Застосуємо (17) до (12) та (14), маємо:

$$\begin{cases} u_j = u_{j-1} + v_{j-1} h \\ v_j = v_{j-1} + \int_{x_{j-1}}^{x_j} f dx - v_{j-1} h - u_{j-1} h \end{cases}, \quad (18)$$

$j = 1, \dots, N$, або

$$\frac{u_{j+1}-2u_j-u_{j-1}}{h^2}+\frac{u_j-u_{j-1}}{h}+u_{j-1}=\frac{1}{h}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f dx, \quad (19)$$

де $j = 1, \dots, N$.

Висновки та перспективи. В статті запропоновано, в рамках математичного аналізу, новий алгоритм для моделювання лінійних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних, що не потребує введення гладких базисних функцій і розгляду Гільбертових просторів, як в проекційних методах типу Бубнова-Галеркіна та інших. Даний метод може стати альтернативним підходом до моделювання лінійних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних на комп'ютері. Використання цього алгоритму дозволить значно спростити комп'ютерне моделювання розглянутих математичних моделей без втрати в точності отриманих результатів.

Література

1. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-
крайових задач. Київ: НМК ВО, 1991. 88с.

2. Савула Я.Г. Метод скінченних елементів. Київ: НМК ВО, 1993. 100с.

3. Tarek I. Zohdi. A Finite Element Primer for Beginners The Basics. Springer, 2018, 135 p.

4. Zienkiewicz O. The Finite Element Method. Vol.1: The Basis. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2002. – 663 p.

5. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981, 415с.

6. Bers L., John F., Schechter M. Partial differential equations. Lectures in Applied Mathematics: Proceedings (Vol 3), University of Colorado (Boulder campus). Interscience Publishers, New York, London, Sydney,1999, 350p.

7. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics, Vol. II: Partial Differential Equations. Interscience Publishers, New York, N. Y, 1962, 830 p.

8. Hörmander L. Linear Partial Differential Operators. Springer Berlin, Heidelberg, 2013, 287p.

References

1. Shynkarenko G.A. Projection-grid methods for solving initial-boundary value problems. Kyiv: NMK VO, 1991. 88p. {in Ukrainian}

2. Savula Ya.G. Finite Element Method. Kyiv: NMK VO, 1993. 100p. {in Ukrainian}

3. Tarek I. Zohdi. A Finite Element Primer for Beginners The Basics. Springer, 2018, 135 p. {in English}
4. Zienkiewicz O. The Finite Element Method. Vol.1: The Basis. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2002. – 663 p. {in English}
5. Marchuk G.I., Agoshkov V.I. Introduction to projection grid methods. M.: Nauka, 1981, 415p.{in Russian}
6. Bers L., John F., Schechter M. Partial differential equations. Lectures in Applied Mathematics: Proceedings (Vol 3), University of Colorado (Boulder campus). Interscience Publishers, New York, London, Sydney,1999, 350p. {in English}
7. Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics, Vol. II: Partial Differential Equations. Interscience Publishers, New York, N. Y, 1962, 830 p. {in English}
8. Hörmander L. Linear Partial Differential Operators. Springer Berlin, Heidelberg, 2013, 287p. {in English}

Ph.D. **Vasiliy Pechuk**
pechuk.vd@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-9360-8522
Kyiv National University of Construction and Architecture (KNUCA)
Ph.D. **Evgeniy Pechuk**,
evgdmp@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1028-1390
Institute of Hydromechanics NASU

A NEW METHOD FOR NUMERICAL SOLUTION OF SYSTEMS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVES

Systems of linear partial differential equations are the basis of mathematical modeling of many real processes. Since for such systems it is mostly impossible to obtain analytical solutions of Cauchy problems or boundary value problems, there is a need for other approaches. Therefore, approximate, numerical methods are used in practice to solve these systems. The paper proposes a new algorithm for modeling linear systems of partial differential equations, which does not require the introduction of smooth basis functions and consideration of Hilbert spaces, unlike projection methods of the Bubnov-Galerkin type and others. This new numerical method can be a simple alternative to existing methods of integrating partial differential equations, which significantly simplifies the modeling process without losing the accuracy of the results obtained. Linear systems of partial differential equations are considered, which are mathematical models of many technical processes. A new numerical algorithm for modeling these systems is constructed. The new *algorithm is developed on the basis of reducing linear systems of partial differential equations to the generalized Cauchy form for systems of partial differential equations, and numerical integration of the resulting system. This method occupies an intermediate position between projection-grid methods and the method of integral identities. In the simplest version, the approximation is obtained by simple functions. The method of integral identities and difference methods are special cases of this method.*

Keywords: systems of partial differential equations, numerical methods, mathematical modeling, projection-grid methods.