

УДК 631.312:514.18

DOI: 10.32347/0131-579x.2023.104.171-182

д. т. н., професор **Пилипака С.Ф.**,
psf55@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1496-4615, h-index: 6,
к. т. н., доцент **Воліна Т. М.**,
t.n.zaharova@ukr.net, ORCID: 0000-0001-8610-2208, h-index: 5,
Національний університет біоресурсів і природокористування України
к. п. н., доцент **Захарова І.О.**,
zaharova_soippo@ukr.net, ORCID: 0000-0002-9693-5550, h-index: 1,
Сумський державний педагогічний університет імені А.С.Макаренка,
Рибенко І.О.,
fishw36@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7795-1689, h-index: 1,
Ребрій А.М.,
ralm777.as@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3467-2353, h-index: 2,
Сумський національний аграрний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНОГО РУХУ ТОЧКИ ПО ПЛОЩИНІ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ТРИГРАННИКА І ФОРМУЛ ФРЕНЕ

Взаємодія частинок технологічного матеріалу із робочими рухомими поверхнями машин відбувається при різних технологічних процесах. В процесі такої взаємодії частинки змушені певним чином ковзати по поверхні у відносному русі і описувати іншу траєкторію в абсолютному русі. Абсолютна траєкторія є геометричною сумою відносного руху ковзання частинки і переносного руху поверхні. Для додавання цих рухів зручно користуватися двома системами координат: рухомою, по відношенню до якої описується відносний рух частинки, і нерухомою, по відношенню до якої описується переносний рух поверхні і абсолютний рух частинки. У статті розглянуто рух тригранника як переносний, а рух точки в системі тригранника – як відносний. В результаті проведено дослідження відносного руху частинки в стичній площині супровідного тригранника Френе, який рухається по плоскій кривій зі змінною кривиною. Для складання системи диференціальних рівнянь відносного руху частинки було використано формули Френе. У зв'язку з цим, на відміну від традиційного підходу, за незалежну змінну було взято не час, а довжину дуги напрямної кривої, вздовж якої рухається тригранник. Система рівнянь складена в проекціях на орти рухомого тригранника. Її розв'язано чисельними методами. Запропонований підхід розглянуто на прикладі відносного руху вантажу в кузові автомобіля, який рухається по дорозі з криволінійною віссю змінної кривини. Побудовано графіки відносної траєкторії ковзання вантажу та відносної швидкості для заданої швидкості руху автомобіля.

Ключові слова: частинка; супровідний тригранник; напрямна плоска крива; кривина; траєкторія ковзання; швидкість руху; коефіцієнт тертя.

Постановка проблеми. Взаємодія частинок технологічного матеріалу із робочими рухомими поверхнями машин відбувається при різних технологічних процесах. В процесі такої взаємодії частинки змушені певним чином ковзати по поверхні у відносному русі і описувати іншу траєкторію в абсолютному русі. Абсолютна траєкторія є геометричною сумою відносного руху ковзання частинки і переносного руху поверхні. Для додавання цих рухів зручно користуватися двома системами координат: рухомою, по відношенню до якої описується відносний рух частинки, і нерухомою, по відношенню до якої описується переносний рух поверхні і абсолютний рух частинки. В механіці розглядається спосіб описання руху точки і розкладання швидкості і прискорення на одиничні орти супровідного тригранника траєкторії, однак це стосується простого руху. Формою просторової кривої однозначно задається рух супровідного тригранника Френе, як твердого тіла. В статті розглянуто рух тригранника як переносний, а рух точки в системі тригранника – як відносний. Така схема дозволяє застосувати широко відомі в диференціальній геометрії формули Френе і отримати нові цікаві результати.

Ціль статті. Показати можливість застосування тригранника і Формул Френе для аналітичного опису складного руху матеріальної точки по його площині, переносне переміщення якої задане плоскою напрямною кривою, вздовж якої рухається тригранник.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідження руху різних середовищ інколи зводиться до дослідження окремої частинки. Рух окремої частинки або матеріальної точки не можна ототожнювати із рухом тіла або технологічного матеріалу, який складається із окремих частинок. Проте на основі руху окремої частинки можна виявити закономірності, які певною мірою можна перенести на тіло або на матеріал або ж виявити напрям, в якому потрібно продовжувати подальші дослідження. Частинки можуть бути різної природи: біомаса всередині горизонтального циліндра, який обертається навколо своєї осі [1], мінеральні добрива, що розкидаються відцентровими апаратами [2], зернові і інші суміші для сепарування і очищення [3], розподіл насіння сільськогосподарських машин під час посіву [4, 5] та інші [6–9]. Теорія розсіювання частинок мінеральних добрив висвітлена у статті [10]. Дослідження руху тіла в окремих випадках теж можна звести до частинки. Це стосується того випадку, коли силами інерції від обертання тіла можна знехтувати через малі кутові швидкості їх обертання [11]. Рух частинки по внутрішній поверхні сферичного сегмента, що обертається навколо вертикальної осі, розглянуто в праці [12], а по зовнішній поверхні горизонтального циліндра із коливальним рухом – в праці [13].

Основна частина. Оскільки формою просторової кривої однозначно задається рух супровідного тригранника Френе, то таким чином однозначно задається рух кожної із його граней. Якщо напрямна крива просторова, то закономірність руху тригранника залежить від двох диференціальних характеристик кривої: її кривини і скруту. Розглянемо спрощений варіант для плоскої кривої, у якої скрут дорівнює нулю. На рис. 1, а в площині μ розташована крива C_e , вздовж якої рухається супровідний тригранник $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$. У цьому випадку стична площина тригранника, утворена ортами дотичної $\bar{\tau}$ і головної нормалі \bar{n} , буде збігатися із площиною самої напрямної кривої (на рис. 1 стична площина тригранника зафарбована сірим кольором).

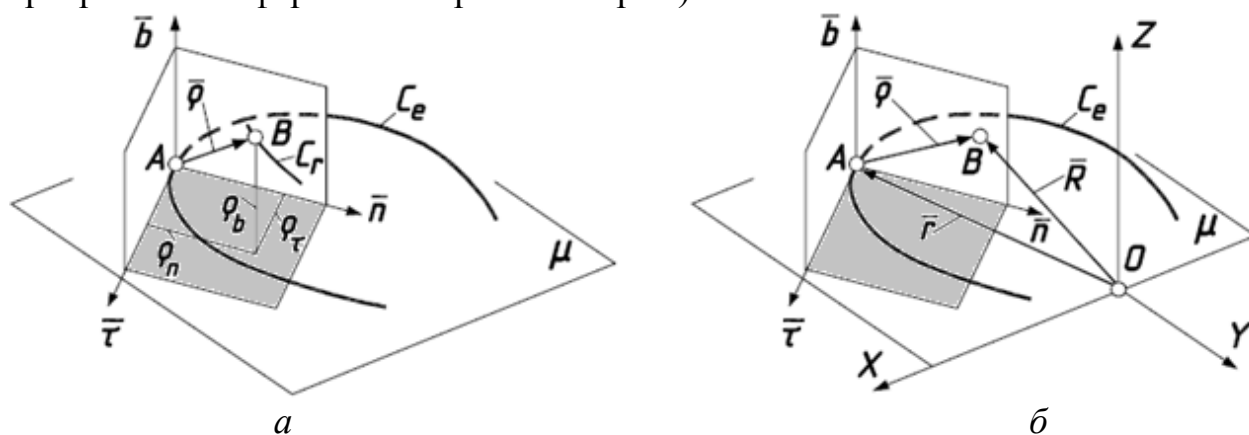


Рис. 1. Графічні ілюстрації до складання векторного рівняння руху точки B , як геометричної суми переносного руху тригранника і відносного руху точки в триграннику:

- а) супровідний тригранник $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ напрямної плоскої кривої C_e із позначеними координатами точки B в його системі; б) схема до складання векторного рівняння положення точки B із врахуванням двох систем: $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ і $OXYZ$

При русі тригранника вздовж напрямної кривої C_e із швидкістю V_e стична площина ще і повертатиметься. Кут її повороту α визначається кутом повороту дотичної $\bar{\tau}$. При переміщенні тригранника по кривій на довжину її дуги Δs дотична повернеться на кут $\Delta\alpha$. Відомо, що границя відношення $\Delta\alpha/\Delta s$ при прямуванні Δs до нуля, є величиною кривини k кривої. З іншої сторони, границя $\Delta\alpha/\Delta t$, де Δt – час, за який відбувся поворот, дає величину кутової швидкості ω повороту стичної площини. Очевидно, що між кривиною k кривої і кутовою швидкістю ω повороту стичної площини існує взаємозв'язок. Його можна знайти:

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = kV_e \quad (1)$$

Із залежності (1) випливає, що при сталих значеннях швидкості руху тригранника і кривини напрямної кривої (тобто кола), кутова швидкість обертання стичної площини теж є сталою величиною.

Абсолютний рух частинки складатиметься із двох рухів – переносного руху тригранника Френе і відносного руху частинки в системі тригранника. Нехай частинка буде розташована на певній відстані ρ від вершини тригранника. Тоді її положення у векторному вигляді запишеться (рис. 1, б):

$$\bar{R} = \bar{r} + \bar{\rho} \quad (2)$$

де \bar{R} – радіус-вектор положення частинки в нерухомій системі $OXYZ$, \bar{r} – радіус-вектор точки на кривій, в якій знаходиться вершина A тригранника, $\bar{\rho}$ – радіус-вектор положення частинки в системі тригранника.

Вважатимемо, що координати ρ_τ , ρ_n і ρ_b в системі тригранника є змінними і залежними від положення його на кривій C_e , тобто залежними від довжини дуги s напрямної кривої. У такому випадку при русі тригранника по кривій точка B певним чином рухатиметься в його системі, описуючи відносну траєкторію C_r (рис. 1,а). Перепишемо вираз (2) із врахуванням розкладання вектора $\bar{\rho}$ на орти тригранника:

$$\bar{R} = \bar{r} + \bar{\tau}\rho_\tau + \bar{n}\rho_n + \bar{b}\rho_b \quad (3)$$

Щоб знайти абсолютну швидкість руху частинки V_a , потрібно векторне рівняння (3) продиференціювати по часу t . Застосування тригранника Френе дає можливість використати формули Френе, які широко відомі у диференціальній геометрії. Вони дозволяють просто знаходити похідні ортів тригранника в проекціях на ці ж орти. Однак у цьому випадку незалежною змінною має бути довжина дуги s – шляху, який проходить вершина тригранника, рухаючись по колу кривій C_e . Приймаючи s за незалежну змінну, знайдемо взаємозв'язок між абсолютною швидкістю V_a і похідною вектора \bar{R} по змінній s :

$$V_a = \frac{d\bar{R}}{dt} = \frac{d\bar{R}}{ds} \frac{ds}{dt} = V_e \frac{d\bar{R}}{ds} \quad (4)$$

Таким чином, щоб отримати вираз абсолютної швидкості V_a , потрібно швидкість V_e переносного руху тригранника по кривій C_e помножити на похідну виразу(3). Продиференціюємо (3) по змінній s , маючи на увазі, що $\rho_\tau = \rho_\tau(s)$, $\rho_n = \rho_n(s)$ і $\rho_b = \rho_b(s)$:

$$\frac{d\bar{R}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{ds} + \left(\frac{d\bar{\tau}}{ds} \rho_\tau + \bar{\tau} \frac{d\rho_\tau}{ds} \right) + \left(\frac{d\bar{n}}{ds} \rho_n + \bar{n} \frac{d\rho_n}{ds} \right) + \left(\frac{d\bar{b}}{ds} \rho_b + \bar{b} \frac{d\rho_b}{ds} \right) \quad (5)$$

Похідні $\frac{d\bar{r}}{ds}$, $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$, $\frac{d\bar{n}}{ds}$, $\frac{d\bar{b}}{ds}$ згідно формул Френе розписуються в проекціях на орти тригранника через кривину k і скрут σ напрямної кривої. Напрямна крива C_e є плоскою кривою, отже скрут $\sigma = 0$. Формули Френе в цьому випадку спрощуються і мають наступний вигляд:

$$\bar{r}' = \bar{\tau}; \quad \bar{\tau}' = k\bar{n}; \quad \bar{n}' = -k\bar{\tau}, \quad \bar{b}' = 0 \quad (6)$$

Метою нашого дослідження є дослідження руху точки в горизонтальній (тобто стичній) площині тригранника, тому $\rho_b = \rho'_b = 0$. Враховуючи це і підставивши вирази похідних (6) у (5), після групування проєкцій по ортах $\bar{\tau}$, \bar{n} , \bar{b} отримаємо:

$$\begin{aligned} \bar{R}' = \bar{\tau} + \bar{n}k\rho_\tau + \bar{\tau}\rho'_\tau - \bar{\tau}k\rho_n + \bar{n}\rho'_n = \\ \bar{\tau}(1 + \rho'_\tau - k\rho_n) + \bar{n}(\rho'_n + k\rho_\tau). \end{aligned} \quad (7)$$

Диференціюванням абсолютної швидкості (4) по часу t при умові, що $V_e = const$, отримаємо вираз абсолютного прискорення w :

$$w = \frac{d}{dt} \left(V_e \frac{d\bar{R}}{ds} \right) = V_e^2 \frac{d^2\bar{R}}{ds^2} \quad (8)$$

Другу похідну \bar{R}'' знаходимо диференціюванням векторного виразу (7) по змінній s із застосуванням формул Френе (6), маючи на увазі, що кривина $k = k(s)$ є змінною величиною і отримані вирази групуємо по ортах тригранника:

$$\begin{aligned} \bar{R}'' = \bar{\tau}'(1 + \rho'_\tau - k\rho_n) + \bar{\tau}(\rho''_\tau - k'\rho_n - k\rho'_n) + \\ + \bar{n}'(\rho'_n + k\rho_\tau) + \bar{n}(\rho''_n + k'\rho_\tau + k\rho'_\tau) = \\ = \bar{\tau}[\rho''_\tau - k'\rho_n - k(k\rho_\tau + 2\rho'_n)] + \bar{n}[\rho''_n - k'\rho_\tau + k(1 - k\rho_n + 2\rho'_\tau)] \end{aligned} \quad (9)$$

Після множення отриманих результатів (9) на V_e^2 згідно (8), запишемо вирази абсолютного прискорення точки B в проєкціях на орти тригранника:

$$\begin{aligned} w_\tau = V_e^2 [\rho''_\tau - k'\rho_n - k(k\rho_\tau + 2\rho'_n)]; \\ w_n = V_e^2 [\rho''_n - k'\rho_\tau + k(1 - k\rho_n + 2\rho'_\tau)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Щоб знайти величину абсолютного прискорення точки, яка рухається в стичній площині тригранника, а сам тригранник рухається про кривій, необхідно задати швидкість його руху V_e , параметричні рівняння напрямної кривої $x = x(s)$ і $y = y(s)$ і закон руху точки $\rho_\tau = \rho_\tau(s)$, $\rho_n = \rho_n(s)$. Кривину $k = k(s)$ напрямної кривої C_e знаходять за відомою формулою.

Складнішою є обернена задача – знаходження закону відносного руху матеріальної точки (частинки), яка рухається під дією прикладених до неї сил. Будемо вважати, що стична площина представляє собою кузов вантажного автомобіля, який рухається із сталою швидкістю V_e по горизонтальній дорозі із криволінійною віссю у вигляді напрямної кривої. Роль матеріальної точки відіграватиме вантаж у кузові автомобіля. Потрібно знайти траєкторію та величину швидкості можливого ковзання вантажу в кузові.

Вісь дороги, тобто криву C_e , задамо параметричними рівняннями:

$$\begin{aligned}
 x &= 2a \cdot \operatorname{Arctg}\left(\frac{s}{a}\right) - s; \\
 y &= a \cdot \ln\left(\frac{a^2 + s^2}{a^2}\right).
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Кривину k кривої, заданої параметричними рівняннями у функції довжини дуги s , знаходять за відомою формулою:

$$k = \sqrt{x''^2 + y''^2} \tag{12}$$

Після підстановки у (12) других похідних рівнянь (11), знаходимо вираз кривини k і після диференціювання k' :

$$k = \frac{2a}{a^2 + s^2}; \quad k' = -\frac{4as}{(a^2 + s^2)^2} \tag{13}$$

Диференціальне рівняння абсолютного руху частинки у векторному записі має вигляд $m\bar{w} = \bar{F}$, де m – маса частинки, \bar{w} – вектор абсолютного прискорення, \bar{F} – результуючий вектор прикладених до частинки сил. Такими силами є сила ваги mg ($g=9,81 \text{ м/с}^2$), реакція N площини (днища) кузова, сила тертя $F=f \cdot N$ при ковзанні частинки по днищі кузова, де f – коефіцієнт тертя. Всі сили мають строго визначений напрям дії.

Сила ваги mg спрямована вниз, тобто в протилежну сторону напрямку орта бінормалі \bar{b} . Вона врівноважується реакцією N днища автомобіля, спрямованою вгору. Таким чином, можна записати: $N=mg$. Отже, сила тертя має сталу величину: $F=f \cdot m \cdot g$. Вона спрямована в протилежну сторону швидкості V_r ковзання частинки, яка знаходиться в точці B . На рис. 2 крива C_e зображена на вигляді зверху, коли бінормаль \bar{b} проєкціюється в точку. Прямокутне днище автомобіля зафарбоване в сірий колір і утворене при від'ємних значеннях ортів $\bar{\tau}$ і \bar{n} тригранника. Таке його розташування відповідає ймовірній траєкторії ковзання вантажу, оскільки відцентрова сила, що зумовлює його ковзання, спрямована від центру кривини напрямної кривої. Знайдемо одиничний напрямний вектор дії сили тертя F . Проекції відносної швидкості частинки на орти тригранника знайдемо множенням похідних радіус-вектора $\bar{\rho}$ на швидкість V_e в силу зазначених раніше причин. Отже, проєкції відносної швидкості V_r ковзання і її величина запишуться:

$$V_{r\tau} = V_e \rho'_\tau; \quad V_{rn} = V_e \rho'_n; \quad V_r = V_e \sqrt{\rho'^2_\tau + \rho'^2_n} \tag{14}$$

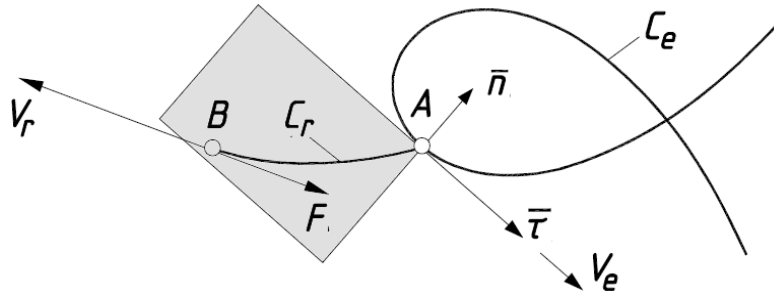


Рис. 2. Схема переміщення кузова автомобіля вздовж криволінійної ділянки шляху з векторами переносної V_e , відносної V_r швидкостей і сили тертя F

Розкладемо силу тертя $F=fmg$ на орти тригранника з урахуванням її напрямку та у відповідності із співвідношенням проєкцій (14):

$$F_\tau = -fmg \frac{\rho'_\tau}{\sqrt{\rho_\tau'^2 + \rho_n'^2}}; \quad F_n = -fmg \frac{\rho'_n}{\sqrt{\rho_\tau'^2 + \rho_n'^2}}. \quad (15)$$

Векторне рівняння $m\bar{w} = \bar{F}$ в проєкціях на орти тригранника запишеться:

$$mw_\tau = F_\tau; \quad mw_n = F_n. \quad (16)$$

Після підстановки у рівняння (16) виразів абсолютного прискорення (10), сили тертя F (15) і після скорочення на масу m отримаємо систему двох диференціальних рівнянь з двома невідомими функціями $\rho_\tau = \rho_\tau(s)$ і $\rho_n = \rho_n(s)$:

$$V_e^2 (\rho_\tau'' - k'\rho_n - k^2\rho_\tau - 2k\rho_n') = -fg \cdot \frac{\rho'_\tau}{\sqrt{\rho_\tau'^2 + \rho_n'^2}}; \quad (17)$$

$$V_e^2 (\rho_n'' + k + k'\rho_\tau - k^2\rho_n + 2k\rho_\tau') = -fg \cdot \frac{\rho'_n}{\sqrt{\rho_\tau'^2 + \rho_n'^2}},$$

Графічне представлення результатів чисельного інтегрування системи (17) показано на рис. 3. Інтегрування здійснювалося при зміні дугової координати s від -40 м до 40 м. Значення постійних прийнято: $a=15$; $f=0,3$; $V_e=5$ м/с. На рис. 3 побудовано графіки зміни відносної і абсолютної швидкості руху вантажу. Із рис. 3, а видно, що ковзання вантажу почалося приблизно при $s \approx -5,5$ м і закінчилось при $s \approx 14$ м, при цьому максимальна відносна швидкість досягла значення $V_r \approx 0,7$ м/с. Значення дугової координати s , при якому почався відносний рух, можна визначити аналітичним шляхом. Ковзання вантажу почнеться тоді, коли відцентрова сила $F_c = mV_e^2 k$ перевищить силу тертя $F = fmg$. Прирівнявши ці сили і підставивши вираз $k=k(s)$ із (3), одержимо рівняння граничне значення дугової координати s :

$$\frac{m \cdot V_e^2 \cdot 2a}{a^2 + s^2} = fmg, \quad \text{звідки } s = \sqrt{\frac{a}{fg} (2V_e^2 - afg)}. \quad (18)$$

Розв'язок рівняння (18) при зазначених постійних показує, що відносний рух вантажу почнеться при $s > -5,46$ м. Максимальна абсолютна швидкість руху вантажу досягається при $s \approx 14$ м. В цей момент ковзання вантажу припиняється і абсолютна його швидкість починає зменшуватися (рис. 3, б).

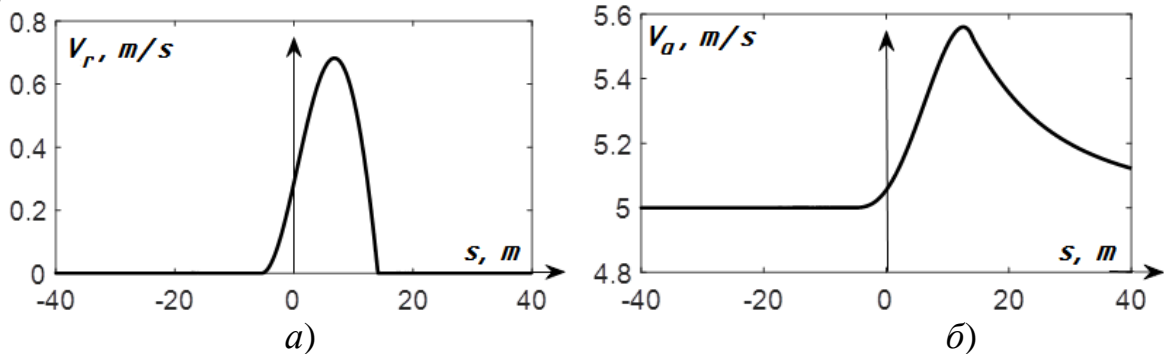


Рис. 3. Графіки зміни швидкостей руху вантажу в кузові автомобіля:
а) відносний рух; б) абсолютний рух

На рис. 4, а в масштабі побудована напрямна крива C_e , на якій потовщеною лінією виділено ділянку, при русі по якій стичної площини тригранника (тобто днища кузова автомобіля) відбувалося ковзання вантажу. Сам кузов у збільшеному масштабі показаний на рис. 4, б, на якому побудовано траєкторію C_r ковзання вантажу. З нього видно, що вантаж у кузові змістився приблизно на 1,5 м в сторону протилежного борта і приблизно на 0,25 м в сторону, протилежну напрямку руху.

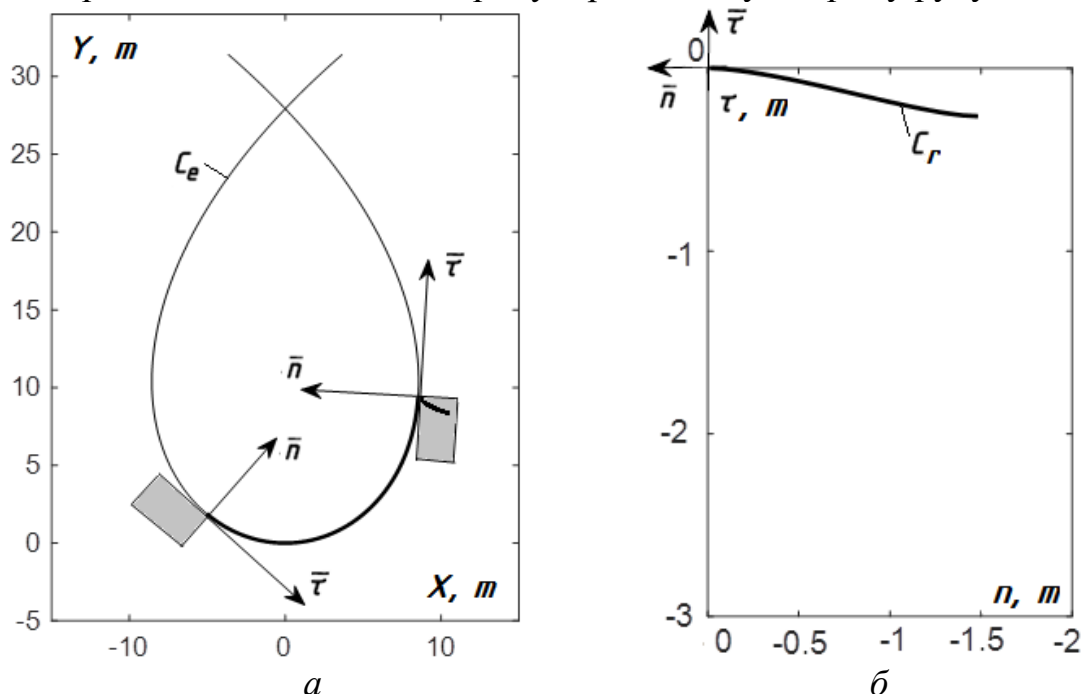


Рис. 4. Графічні ілюстрації до руху автомобіля з вантажем у кузові, що зафарбований у сірий колір:
а) траєкторія C_e руху автомобіля з його положенням на початку ковзання вантажу і після припинення ковзання; б) траєкторія C_r ковзання вантажу

Траєкторія і швидкість ковзання вантажу значною мірою залежать від коефіцієнта тертя і швидкості руху автомобіля. На рис. 5 побудовано графіки зміни швидкості ковзання і траєкторії руху вантажу в кузові автомобіля для різних значень коефіцієнта тертя f .

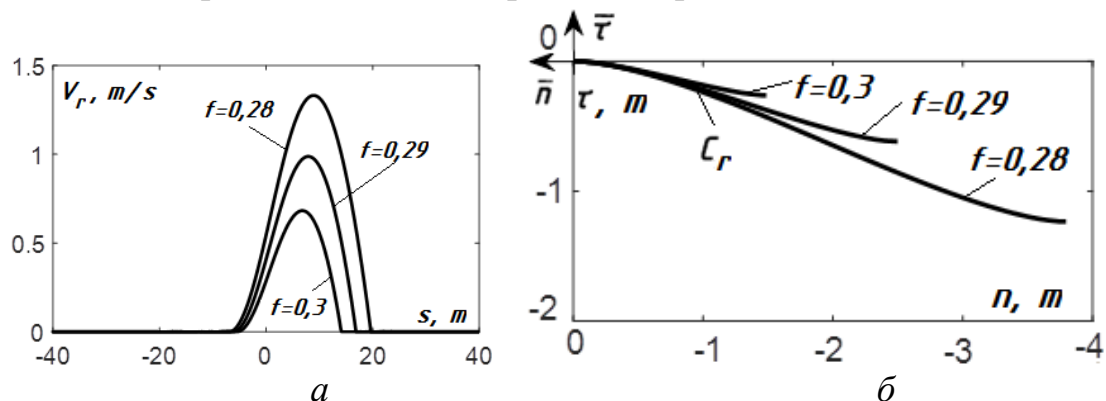


Рис. 5. Графічні ілюстрації ковзання вантажу у кузові автомобіля для різних значень коефіцієнта тертя f :

а) графіки зміни відносної швидкості ковзання; б) траєкторії ковзання вантажу

Суттєвий вплив швидкості V_e руху автомобіля на траєкторію ковзання вантажу пояснюється тим, що квадрат швидкості V_e входить до виразу відцентрової сили $F_c = mV_e^2 k$, яка спричинює ковзання.

Висновки та перспективи. Застосування супровідного тригранника кривої у ролі рухомої системи координат дає можливість розв'язувати задачі складного руху матеріальної точки. Форма напрямної кривої, заданої параметричними рівняннями у функції її довжини, визначає переносний рух тригранника і дає можливість застосувати формули Френе для опису відносного руху точки в системі тригранника. Такий підхід дає можливість задавати переносний рух стичної площини тригранника по кривій із змінною кривиною, тобто розширити клас задач на складний рух точки, при якому обертальний рух навколо нерухомої осі є частковим випадком. Прикладом такої задачі є знаходження відносного руху вантажу у кузові автомобіля, що рухається по дорозі із криволінійною віссю змінної кривини.

Література

1. Golub G., Szalay K., Kukharets S., Marus O. Energy efficiency of rotary digesters. *Progress in Agricultural Engineering Sciences*, 2017. Vol. 13(1). P. 35–49. DOI: <https://doi.org/10.1556/446.13.2017.3>.
2. Адамчук В. В. Дослідження загального випадку розгону мінеральних добрив відцентровим розсіювальним органом. *Вісник аграрної науки*. Київ, 2003. № 12. С. 51–57.
3. Bulgakov V., Nikolaenko S., Holovach I., Adamchuk V., Kiurchev S., Ivanovs S., Olt J. Theory of grain mixture particle motion during aspiration separation.

Agronomy Research, 2020. Vol. 18(1). P. 18–37.
DOI: <https://doi.org/10.15159/ar.20.057>.

4. Гевко Б. М., Лотоцький Р. І., Пришляк В. М. Математичне моделювання руху зерна по рухомим поверхням висівних апаратів. *Сільськогосподарські машини*, 2013. Вип. 26. С. 27–35. Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/silmah_2013_26_6.

5. Морозов І. В., Дудін О. В. Модель траєкторії руху зерна по поверхнях сільськогосподарських машин. *Вісник Харківського державного технічного університету сільського господарства*. Харків : ХДТУСГ, 2003. Вип. 21. С. 124–131.

6. Batluk V., Basov M., Klymets V. Mathematical model for motion of weighted parts in curled flow. *Econtechmod. An International Quarterly Journal*, 2013. Vol. 2(3). P. 17–24. Режим доступу: <https://oldena.lpnu.ua/bitstream/ntb/23659/1/4-17-24.pdf>.

7. Liaposchenko O., Pavlenko I., Nastenko O. The model of crossed movement and gas-liquid flow interaction with captured liquid film in the inertial-filtering separation channels. *Separation and Purification Technology*, 2017. Vol. 173. P. 240–243. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.seppur.2016.08.042>.

8. Pavlenko I., Liaposhchenko O., Ochowiak M., Olszewski R., Demianenko M., Starynskyi O., Ivanov V., Yanovych V., Włodarczak S., Doligalski M. Three-dimensional mathematical model of the liquid film downflow on a vertical surface. *Energies*, 2020. Vol. 13(8). 1938. DOI: <https://doi.org/10.3390/en13081938>.

9. Lytvynenko A., Yukhymenko M., Pavlenko I., Pitel J., Mizakova, J., Lytvynenko O., Ostroha R., Bocko J. Ensuring the reliability of pneumatic classification process for granular material in a rhomb-shaped apparatus. *Applied Sciences*. Switzerland, 2019. Vol. 9(8), 1604. DOI: <https://doi.org/10.3390/app9081604>.

10. Kobets A.S., Ponomarenko N.O., Kharytonov M.M. Construction of centrifugal working device for mineral fertilizers spreading. *INMATEH - Agricultural Engineering*. National institute of research-development for machines and installations designed to agriculture and food industry - INMA Bucharest, 2017. Vol. 51, no.1. P. 5–14.

11. Loveikin V. S., Romesevych Yu. O. Dynamic optimization of a mine winder acceleration mode. *Науковий вісник Національного гірничого університету*, 2017. Vol. 4. P. 55–61. Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nvngu_2017_4_10.

12. Pylypaka S., Nesvidomin V., Volina T., Sirykh L., Ivashyna L. Movement of the Particle on the Internal Surface of the Spherical Segment Rotating About a Vertical Axis. *INMATEH - Agricultural Engineering*, 2020. Vol. 62(3). P. 79–86.

13. Pylypaka S., Klendiy M., Zaharova T. Movement of the particle on the external surface of the cylinder, which makes the translational oscillations in horizontal planes. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 2019. Part F2. P. 336–345. DOI: [10.1007/978-3-319-93587-4_35](https://doi.org/10.1007/978-3-319-93587-4_35).

References

1. Golub G., Szalay K., Kukharets S., Marus O. (2017). Energy efficiency of rotary digesters / *Progress in Agricultural Engineering Sciences*. Vol. 13(1). P. 35– 49.

2. Adamchuk V. V. (2003). Doslidzhennia zahalnoho vypadku rozghonu mineralnykh dobryv vidtsentrovym rozsiuvalnym orhanom / Visnyk ahrarynoi nauky. K. No 12. P. 51–57. {in Ukrainian}
3. Bulgakov V., Nikolaenko S., Holovach I., Adamchuk V., Kiurchev S., Ivanovs S., Olt J. (2020). Theory of grain mixture particle motion during aspiration separation / Agronomy Research. Vol. 18(1). P. 18–37. {in Ukrainian}
4. Hevko B. M., Lototskyi R. I., Pryshliak V. M. (2013). Matematyчне modeliuвання rukhu zerna po rukhomym poverkhniam vysivnykh aparativ / Silskohospodarski mashyny. Vol. 26. P. 27–35. {in Ukrainian}
5. Morozov I. V., Dudin O. V. (2003). Model traiektorii rukhu zerna po poverkhniakh silskohospodarskykh mashyn / Visnyk Kharkivskoho derzhavnoho tekhnichnoho universytetu silskoho hospodarstva. Kharkiv. Vol. 21. P. 124–131. {in Ukrainian}
6. Batluk V., Basov M., Klymets V. (2013). Mathematical model for motion of weighted parts in curled flow / *Econtechmod. An International Quarterly Journal*. Vol. 2(3). P. 17–24.
7. Liaposchenko O., Pavlenko I., Nastenka O. (2017). The model of crossed movement and gas-liquid flow interaction with captured liquid film in the inertial-filtering separation channels / *Separation and Purification Technology*. Vol. 173. P. 240–243.
8. Pavlenko I., Liaposhchenko O., Ochowiak M., Olszewski R., Demianenko M., Starynskyi O., Ivanov V., Yanovych V., Włodarczak S., Doligalski M. (2020). Three-dimensional mathematical model of the liquid film downflow on a vertical surface / *Energies*. Vol. 13(8). 1938.
9. Lytvynenko A., Yukhymenko M., Pavlenko I., Pitel J., Mizakova, J., Lytvynenko O., Ostroha R., Bocko J. (2019). Ensuring the reliability of pneumatic classification process for granular material in a rhomb-shaped apparatus / *Applied Sciences*. Switzerland. Vol. 9(8). 1604.
10. Kobets A.S., Ponomarenko N.O., Kharytonov M.M. (2017). Construction of centrifugal working device for mineral fertilizers spreading / *INMATEH - Agricultural Engineering*. National institute of research-development for machines and installations designed to agriculture and food industry - INMA Bucharest. Vol. 51(1). P. 5–14.
11. Loveikin V. S., Romesevych Yu. O. (2017). Dynamic optimization of a mine winder acceleration mode / *Naukovi visnyk Natsionalnoho hirnychoho universytetu*. Vol. 4. P. 55–61.
12. Pylypaka S., Nesvidomin V., Volina T., Sirykh L., Ivashyna L. (2020). Movement of the Particle on the Internal Surface of the Spherical Segment Rotating About a Vertical Axis / *INMATEH - Agricultural Engineering*. Vol. 62(3). P. 79–86.
13. Pylypaka S., Klendiy M., Zaharova T. (2019). Movement of the particle on the external surface of the cylinder, which makes the translational oscillations in horizontal planes / *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Part F2. P. 336–345.

Doctor of Technical Sciences, prof. **Serhii Pylypaka**,
psf55@ukr.net, ORCID: 0000-0002-1496-4615

Ph. D., assoc. prof. **Tatiana Volina**,
t.n.zaharova@ukr.net, ORCID: 0000-0001-8610-2208

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

Ph. D., assoc. prof. **Irina Zakharova**,
zaharova_soippo@ukr.net, ORCID: 0000-0002-9693-5550
Sumy State Pedagogical University named after A. S. Makarenko,
Irina Rybenko,
fishw36@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7795-1689
Alla Rebrii,
ralm777.as@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3467-2353
Sumy National Agrarian University

RESEARCH OF THE COMPLEX MOTION OF A POINT ON A PLANE BY MEANS OF THE TRIANGLE AND FRENE'S FORMULAS

The interaction of the particles of the technological material with the working moving surfaces of the machines occurs during various technological processes. In the process of such interaction, the particles are forced to slide along the surface in a certain way in relative motion and describe a different trajectory in absolute motion. The absolute trajectory is the geometric sum of the relative sliding motion of the particle and the translational motion of the surface. To add these movements, it is convenient to use two coordinate systems: a moving one, in relation to which the relative movement of the particle is described, and a stationary one, in relation to which the translational movement of the surface and the absolute movement of the particle are described. A study of the relative motion of a particle in the tangent plane of the accompanying Frenet trihedron, which moves along a flat curve with variable curvature, was carried out. The relative motion of a particle in the tangent plane of the accompanying Frenet trihedron, which moves along a flat curve with variable curvature, is considered. Frenet's formulas were used to compile the system of differential equations of the relative motion of the particle. In this regard, unlike the traditional approach, the independent variable was not time, but the length of the arc of the guide curve along which the trihedron moves. The system of equations was composed in projections onto the vertices of a movable trihedron. It was solved by numerical methods. The proposed approach is considered on the example of the relative movement of a load in the car moving along a road with a curvilinear axis of variable curvature. The graphs of the relative sliding trajectory of the load and the relative speed for the given speed of the car were plotted.

Keywords: particle; accompanying trihedron; guide flat curve; curvature; sliding trajectory; velocity; coefficient of friction.